Morfismos, Vol. 25, No. 2, 2021, pp. 13–27

Realización de anillos polinomiales a través del homomorfismo transfer *

Sofía Ibarra [1] Miguel A. Maldonado [2]

Resumen

Haremos una revisión del problema de realización de anillos polinomiales con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ como anillos de cohomología. Usaremos para ello el homomorfismo inducido en cohomología por una proyección cubriente especial, definida por la construcción de Borel asociada a un G-espacio.

2010 Mathematics Subject Classification: 55N10, 55P20, 55R12.
Keywords and phrases: cohomología, homomorfismo transfer, proyección cubriente, espacio clasificante.

1 Introducción

La realización de un objeto algebraico A, como un grupo o un anillo, consiste en encontrar un espacio topológico X de manera que para algún invariante $v(X)$ de X se tenga un isomorfismo de la forma $v(X) \cong A$. Esta realización permite convertir problemas algebraicos en geométricos y viceversa, logrando así un cambio de enfoque en ciertas cuestiones con la intención de simplificarlas.

Un ejemplo de este procedimiento es la realización de un grupo como el grupo fundamental de un espacio: si $G = \langle S \,|\, W \rangle$ es una presentación de grupo, una aplicación directa del Teorema de Seifert-van Kampen permite interpretar al conjunto de generadores S como un etiquetado

---

*Este trabajo forma parte de la tesis de grado de la primera autora (1), bajo la asesoría del segundo autor (2), para obtener el grado de licenciatura en matemáticas por parte de la Universidad Autónoma de Zacatecas. El examen de grado se presentó en julio de 2021.**

para los lados de un polígono regular y a las relaciones W como una identificación entre los lados del polígono, de manera que el espacio cociente obtenido X es un CW-complejo con $\pi_1(X) \cong G$. Para más información al respecto véase [5, pp. 52].

Otro caso de realización es el de la homología reducida en dimensión n: dado un grupo abeliano G, es posible construir un CW complejo $M(G, n)$, conocido como *espacio de Moore*, tal que su grupo de homología satisface el isomorfismo $H_n(M(G, n)) \cong G$, y todos sus otros grupos de homología son triviales. Puesto que $H_1(X) \cong \pi_1(X)^{ab}$, la construcción de este espacio puede considerarse como una generalización del ejemplo anterior ([5, pp. 143]).

En este trabajo consideraremos un caso particular del siguiente problema, propuesto por N. Steenrod ([6]): qué anillos polinomiales graduados pueden ser el anillo de cohomología $H^*(X; R)$ de un espacio X con coeficientes en un anillo R? Es decir, dado un anillo polinomial graduado S, con generadores en grados $d_1, d_2, \ldots$, qué condiciones debemos exigirle a S para que exista un espacio X tal que $H^*(X; R) \cong S$? El problema planteado es ya de una naturaleza muy distinta a los ejemplos mencionados arriba, pues ahora la estructura algebraica tiene tres aspectos que deben ser tomados en cuenta para su realización: el anillo de los coeficientes, el número de generadores y el grado de dichos generadores.

Particularmente, en esta ocasión nos ocuparemos de realizar algunos anillos polinomiales con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$. Con este propósito, seguiremos de cerca el contenido de la sección 3G del libro [5], en la que se emplea el homomorfismo transfer en cohomología asociado a una proyección cubriente especial, proveniente de la construcción de Borel de un G-espacio.

En la segunda sección sección hablaremos del homomorfismo transfer en cohomología inducido por una proyección cubriente $E \to B$, así como de un resultado crucial (el teorema 2.1) que permite relacionar las cohomología de E y B de una manera directa. Como es el caso de mayor interés, hacia el final de esta sección presentaremos una breve introducción a la construcción de Borel y su proyección cubriente asociada.

En la tercera sección presentaremos un método que nos posibilitará realizar ciertos anillos de cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ y una cantidad finita de generadores, cuyos grados estén dados por múltiplos pares específicos de p. Concretamente, en la cuarta sección del trabajo veremos que el anillo $\mathbb{Z}_p[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, con $|\alpha_i| = 2i$, puede ser realizado, como lo indica el teorema 4.6.

2 El homomorfismo transfer

Sea $\pi : E \to B$ una proyección cubriente de n hojas. Además del homomorfismo inducido $\pi_* : C_*(E; R) \to C_*(B; R)$ a nivel de complejos de cadenas, existe otro homomorfismo T llamado **transfer**, que permite relacionar las cohomologías de los espacios E y B. El homomorfismo T se define a través de las propiedades de levantamiento:

$$T : C_k(B; R) \to C_k(E; R), \qquad \sigma \longmapsto \sum \tilde{\sigma},$$

donde cada sumando es uno de los n levantamientos de σ. El homomorfismo T conmuta con los diferenciales [3, pp. 180], por lo que induce un homomorfismo en cohomología

$$T^* : H^*(E; R) \to H^*(B; R)$$

que también se conoce como **transfer**. A continuación presentaremos un teorema que liga de manera estrecha las cohomologías de E y de B a través del homomorfismo *transfer* en el caso particular de una proyección cubriente con un número finito de hojas. Para ello es preciso describir las clases de cohomología equivariantes bajo la acción de un grupo, así como la imagen de la composición $T^* \circ \pi^*$, para el homomorfismo inducido en cohomología $\pi^* : H^*(B; R) \to H^*(E; R)$.

Dado un grupo finito G, un G-espacio E y $g \in G$ tenemos homomorfismos $g^* : H^*(E; R) \to H^*(E; R)$, inducidos por la acción $x \mapsto g \cdot x$ de G sobre E. Las clases α de $H^*(E; R)$ que satisfacen la igualdad $g^*(\alpha) = \alpha$ para todo elemento $g \in G$ se conocen como *clases equivariantes*, y conforman un subgrupo de $H^*(E; R)$ denotado por $H^*(E; R)^G$.

Respecto a la imagen de $T^* \circ \pi^*$ notemos que $(\pi_* \circ T)(\sigma) = \pi(\sum \widetilde{\sigma}) = n\sigma$, por lo que $T^* \circ \pi^*$ está dado por multiplicación por n; de esta manera, al tomar una cocadena φ y evaluar $(T^* \circ \pi^*)(\varphi)$ en un simplejo σ obtenemos

$$\Big((T^* \circ \pi^*)(\varphi)\Big)(\sigma) = (\varphi \circ \pi \circ T)(\sigma) = \varphi(n\sigma) = n\varphi(\sigma).$$

Por lo tanto, $(T^* \circ \pi^*)(\varphi) = n\varphi$.

Consideremos ahora la acción de G sobre E. Si dicha acción es libre, es posible definir un espacio $B = E/G$, y una proyección cubriente $\pi : E \to B$; observemos que π tiene $|G|$ hojas. La siguiente proposición muestra que bajo estas circunstancias es posible relacionar las cohomologías de los espacios base y total.

Teorema 2.1. *Sea π proyección cubriente como mencionamos anteriormente. Si tenemos coeficientes en un campo F cuya característica es 0 o un primo que no divide a $|G| = n$, el homomorfismo en cohomología*

$$\pi^* : H^*(B; F) \to H^*(E; F)$$

es inyectivo, con imagen dada por el subgrupo $H^*(E; F)^G$ de clases G-equivariantes.

La prueba de este resultado se obtiene de manera directa aplicando las observaciones anteriores; véase [5, Prop. 3G.1].

De las condiciones del resultado anterior se desprende un isomorfismo

$$im(\pi^*) \cong H^*(E; F)^G,$$

que será útil al momento de realizar ciertos anillos polinomiales con coeficientes $\mathbb{Z}_p$, en los cuales los generadores tienen grados pares particulares y p es un número primo.

El resultado anterior es específico para proyecciones cubrientes determinadas por una acción libre. Cuando se tiene un G-espacio y queremos tener un isomorfismo como el del teorema 2.1, pero la acción no es libre, se recurre a la construcción de Borel asociada a G, que presentamos a continuación.

Si tenemos un grupo topológico G podemos construir un G-espacio contráctil EG, conocido como *espacio de Milnor*, con una acción libre de G adjunta. Asociado a G y a EG tenemos el espacio clasificante

$BG = EG/G$; véase [7, Cap.14]. La construcción de estos espacios tiene propiedades funtoriales; en particular, todo homomorfismo $\varphi : G \to H$ induce funciones continuas de la forma:

$$E\varphi : EG \to EH, \qquad B\varphi : BG \to BH.$$

El grupo $Aut(G)$ de automorfismos de G actúa en BG mediante homeomorfismos a través de la asignación $\varphi \mapsto B\varphi$. Finalmente, observemos que si $\mathrm{Aut}(G)$ actúa libremente sobre G, entonces la acción de $\mathrm{Aut}(G)$ sobre BG también es libre, pues si el único elemento de $\mathrm{Aut}(G)$ que deja fijo a los elementos de G entonces también es el único elemento que deja fijos los elementos de BG.

Dado un G-espacio X consideremos el cociente

$$E_G^X := (EG \times X)/G,$$

donde G actúa sobre $EG \times X$ mediante la función $g \cdot (e, x) = (e \cdot g^{-1}, g \cdot x)$. Observemos que aunque la acción de G en X no sea libre, la acción en $EG \times X$ sí lo es. Al objeto resultante E_G^X se le conoce como la **construcción de Borel**, o el **cociente homotópico** de X por la acción de G.

En lo que sigue, haremos uso de la construcción de Borel para reemplazar un G-espacio X en caso de que la G-acción no sea libre. Al tener una acción libre de G sobre $EG \times X$, podemos definir una proyección cubriente de la forma

$$q : X \simeq EG \times X \longrightarrow E_G^X, \quad q(e, x) = [e, x].$$

Utilizaremos el homomorfismo en cohomología inducido por esta proyección más adelante para describir ciertos subanillos polinomiales de especial interés.

3 El problema de Steenrod

Como se mencionó previamente, la realización de un anillo polinomial $R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, para un anillo conmutativo R, consiste en construir un espacio topológico X tal que se tenga un isomorfismo de anillos

$$H^*(X; R) \cong R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]. \tag{1}$$

Bajo este isomorfismo las variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son consideradas como clases de cohomología que pertenecen a ciertos grupos $H^{d_i}(X; R)$, lo cual se expresa diciendo que α_i tiene grado d_i.

Una de las primeras observaciones respecto al isomorfismo (1) es que los generadores α_i se multiplican mediante el producto *cup*, lo que acarrea consecuencias importantes para el anillo $H^*(X; R)$. Por ejemplo, si en R se tiene que $1 \neq -1$, para $\alpha \in H^d(X; R)$ la igualdad

$$\alpha^2 = (-1)^{d^2} \alpha^2 \in H^{2d}(X; R)$$

arroja $(-1)^{d^2} = 1$, lo cual es cierto unicamente si d es par. Otra consecuencia del isomorfismo es la importancia que juega la estructura del álgebra de Steenrod de X en la generalización del problema; véase [1]. En particular, si el anillo polinomial $\mathbb{Z}_p[\alpha]$ puede ser realizado entonces la dimensión del generador es una potencia de 2 o un múltiplo de un divisor par de $2(p-1)$, dependiendo si p es o no par; véase [5, Thm4L.9] para las condiciones exactas. Estos dos ejemplos muestran que el problema de realización tiene varias aristas a considerar.

Por cálculos elementales de cohomología se conocen espacios que realizan anillos polinomiales. Por ejemplo, los espacios proyectivos $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$ y $\mathbb{HP}^n$ realizan ciertos anillos polinomiales truncados $R[\alpha]/\alpha^{n+1}$, para generadores de grado $1, 2$ y 4, respectivamente. De igual forma, los correspondientes anillos no truncados son realizados por las versiones de dimensión infinita $\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{CP}^\infty$ y $\mathbb{HP}^\infty$. Finalmente, usando la fórmula de Künneth, el producto de tales espacios realiza anillos con un número mayor de generadores y sus correspondientes grados, para más información véase el ejemplo 3.12 en [5].

Para el caso de coeficientes racionales la construcción de James $J(S^d)$, para esferas de dimensión par, realiza el anillo polinomial $\mathbb{Q}[x]$. En la próxima sección consideraremos el problema de realización para algunos anillos de polinomios en un número finito de generadores, y con coeficientes $\mathbb{Z}_p$. La manera en que se resuelve el problema está ilustrada en el siguiente ejemplo, en el que se parte de un espacio X con cohomología polinomial $H^*(X; R)$, y a partir de él se construye otro espacio adicional para realizar un subanillo polinomial de $H^*(X; R)$ a través del homomorfismo transfer y el teorema 2.1.

Tomemos el producto $Y = (\mathbb{CP}^\infty)^n$, p un primo mayor a n y consideremos el anillo de cohomología $H^*(Y;\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$, donde los generadores tienen grado 2. El grupo simétrico Σ_n actúa libremente en el espacio $E\Sigma_n \times Y \simeq Y$ por lo que se tiene una proyección cubriente de la forma $E\Sigma_n \times Y \to E^Y_{\Sigma_n}$. El teorema 2.1 nos arroja el isomorfismo

$$H^*(E^Y_{\Sigma_n};\mathbb{Z}_p) \cong H^*(Y;\mathbb{Z}_p)^{\Sigma_n}.$$

Observemos que el lado derecho corresponde a polinomios en n variables $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, invariantes bajo la acción de permutación de Σ_n; es decir, son polinomios simétricos, los cuales son generados por polinomios simétricos elementales $e_i^n := e_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ dados por

$$e_1^n = \sum_i \alpha_i, \quad e_2^n = \sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j, \quad e_3^n = \sum_{i<j<k} \alpha_i\alpha_j\alpha_k$$
$$e_4^n = \sum_{i<j<k<l} \alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l, \quad \cdots \quad e_n^n = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

De esta manera obtenemos el isomorfismo

$$H^*(Y;\mathbb{Z}_p)^{\Sigma_n} \cong \mathbb{Z}_p[e_1^n, e_2^n, \ldots, e_n^n],$$

donde cada generador e_i^n tiene grado $2i$, obteniendo con esto la realización de un anillo polinomial con generadores de grados pares $2i$, con $1 \leq i \leq n$.

A continuación realizaremos un conjunto más amplio de anillos, en los que la construcción de Borel juega un papel importante.

4 La construcción de Borel y el caso $\mathbb{Z}_p$

Como se mencionó previamente ciertos anillos polinomiales pueden ser realizados a través de espacios proyectivos, finitos o no, así como la construcción de James. En esta sección trataremos el caso de la realización de anillos polinomiales $\mathbb{Z}_p[x_1,\ldots,x_n]$.

Para un primo p mayor a 2 consideremos el espacio clasificante $B\mathbb{Z}_p$ y el grupo $\Gamma = Aut(\mathbb{Z}_p)$ de automorfismos $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$. Sabemos que el cociente

$$\pi : E\Gamma \times B\mathbb{Z}_p \longrightarrow E_\Gamma^{B\mathbb{Z}_p}$$

define una proyección cubriente de $p-1=|\Gamma|$ hojas, así que el teorema 2.1 nos indica que existe un isomorfismo

$$H^*(E_\Gamma^{B\mathbb{Z}_p};\mathbb{Z}_p)\cong H^*(E\Gamma\times B\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p)^\Gamma\cong H^*(B\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p)^\Gamma. \tag{2}$$

El cálculo del anillo de cohomología del clasificante $B\mathbb{Z}_p$ con coeficientes $\mathbb{Z}_p$ es un resultado clásico dentro de la topología. Dicho anillo se obtiene al considerar al espacio lente infinito L_p^∞ como un modelo para el clasificante; véase [8, p.92].

Lema 4.1. *El anillo de cohomología $H^*(B\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p)$ está dado como el producto tensorial de un álgebra exterior con un anillo polinomial de la forma $\Lambda_{\mathbb{Z}_p}[\alpha]\otimes\mathbb{Z}_p[\beta]$, donde los generadores α,β tienen grado 1 y 2, respectivamente.*

Para determinar el lado derecho del isomorfismo (2) analizaremos la acción de Γ en los generadores α y β. En primer lugar recordemos que los automorfismos de $\mathbb{Z}_p$ están dados por multiplicación por un entero primo relativo con p. Por otro lado, el resultado anterior indica que $H^1(B\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p), H^2(B\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p)$ son isomorfos a $\mathbb{Z}_p$ generados por α y β, respectivamente. Por otro lado, si $\gamma(x)=mx$ es un generador de Γ, entonces actúa por multiplicación por m en $\pi_1(K(\mathbb{Z}_p,1))$, para $K(\mathbb{Z}_p,1)=B\mathbb{Z}_p\times E\Gamma$; de aquí que γ también actúe por multiplicación por m en $H_1(K(\mathbb{Z}_p,1))$. Finalmente, al considerar

$$\begin{aligned} H^1(K(\mathbb{Z}_p,1);\mathbb{Z}_p) &\cong Hom(H_1(K(\mathbb{Z}_p,1)),\mathbb{Z}_p),\\ H^2(K(\mathbb{Z}_p,1);\mathbb{Z}_p) &\cong Ext(H_1(K(\mathbb{Z}_p,1)),\mathbb{Z}_p)\end{aligned}$$

obtenemos γ actúa por multiplicación por m en los generadores α,β. De esta manera concluimos que

$$\gamma(\alpha^k)=m^k\alpha^k,\qquad \gamma(\beta^k)=m^k\beta^k,\qquad \gamma(\alpha\beta^k)=m^{k+1}\alpha\beta^k.$$

Como α es generador de un álgebra exterior $\gamma(\alpha^k)=m^k\alpha^k=0$ para $k\geq 2$. Por otro lado, puesto que Γ tiene orden $p-1$, la igualdad $\gamma(\alpha\beta^k)=m^{k+1}\alpha\beta^k=\alpha\beta^k$, implica que $m^{k+1}=1$, lo que forzosamente implica que $k+1=i(p-1)$, para algún entero i. De modo similar, $\gamma(\beta^k)=m^k\beta^k=\beta^k$ implica que $m^k=1$; es decir, $k=i(p-1)$, para algún entero i. Así, los únicos elementos fijados por la acción Γ son de la forma

$$\lambda\beta^{i(p-1)},\qquad \lambda\alpha\beta^{i(p-1)-1}\qquad \lambda\in\mathbb{Z}_p.$$

Por lo tanto $H^*(E_\Gamma^{B\mathbb{Z}_p};\mathbb{Z}_p)$ es isomorfo al producto

$$\Lambda_{\mathbb{Z}_p}[\alpha\beta^{p-2}]\otimes\mathbb{Z}_p[\beta^{p-1}],$$

donde los grados de los generadores están dados por $|\alpha\beta^{p-2}|=2p-3$ y $|\beta^{p-1}|=2p-2$.

Es posible generalizar el cálculo anterior considerando a cualquier subgrupo $\Gamma\leq Aut(\mathbb{Z}_p)$ tal que $|\Gamma|=d$, con d un divisor de $p-1$. Aquí un generador γ de Γ es tal que $\gamma(x)=xm^{(p-1)/d}$, y la acción de γ en los generadores de los cálculos anteriores está dado por:

$$\gamma(\beta^k)=m^{k(p-1)/d}\beta^k,\qquad \gamma(\alpha\beta^k)=m^{(k+1)(p-1)/d}\alpha\beta^k.$$

De aquí se sigue que las clases equivariantes son $\alpha\beta^{d-1},\beta^d$ y se obtiene el siguiente resultado

Lema 4.2. *El anillo de cohomología $H^*(E_\Gamma^{B\mathbb{Z}_p};\mathbb{Z}_p)$ está dado por*

$$\Lambda_{\mathbb{Z}_p}[\alpha\beta^{d-1}]\otimes\mathbb{Z}_p[\beta^d],$$

donde los generadores tiene grados $|\alpha\beta^{d-1}|=2d-1,\ |\beta^d|=2d$.

Observemos que si en el resultado anterior hacemos $d=p-1$ se recuperan los cálculos previos para el caso $\Gamma=Aut(\mathbb{Z}_p)$.

En el mismo espíritu de los ejemplos precedentes, en lo que sigue presentaremos algunos resultados que muestran la solución al problema de realización de anillos polinomiales para el caso de anillos con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ y para generadores de ciertas grados pares. Concretamente, haremos una modificación al método usado arriba para eliminar el término del álgebra exterior en el isomorfismo (4.2).

Para p primo tomemos a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ como el límite directo $\varinjlim\mathbb{Z}_{p^i}$, donde $\mathbb{Z}_{p^i}\subseteq\mathbb{Z}_{p^{i+1}}$. A partir de estas inclusiones los espacios clasificantes $B\mathbb{Z}_{p^i}$, considerados como subcomplejos celulares, forman un conjunto de inclusiones de la forma $B\mathbb{Z}_{p^i}\subseteq B\mathbb{Z}_{p^{i+1}}$, lo que permite definir

$$B\mathbb{Z}_{p^\infty}=\cup_i B\mathbb{Z}_{p^i}.$$

Lema 4.3. *El anillo de cohomología $H^*(B\mathbb{Z}_{p^\infty};\mathbb{Z}_p)$ es isomorfo al anillo polinomial $\mathbb{Z}_p[\beta]$, con $|\beta|=2$.*

Demostración. Como $B\mathbb{Z}_{p^j}$ y $B\mathbb{Z}_{p^\infty}$ son CW-complejos, con $B\mathbb{Z}_{p^\infty}$ dado como la unión $\cup_i B\mathbb{Z}_{p^i}$, consideremos el isomorfismo

$$H^n(B\mathbb{Z}_{p^\infty};\mathbb{Z}_p) \cong \varprojlim H^n(B\mathbb{Z}_{p^j};\mathbb{Z}_p),$$

donde el lado derecho es el límite inverso de la colección de grupos $\{H^n(B\mathbb{Z}_{p^j};\mathbb{Z}_p)\}_{j\geq 1}$. Afirmamos que

- Si $n = 2k+1$, entonces $\varprojlim H^n(B\mathbb{Z}_{p^j},\mathbb{Z}_p) = 0$.
- Si $n = 2k$, con $n > 0$, entonces $\varprojlim H^n(B\mathbb{Z}_{p^j},\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$.

Para demostrar esta afirmación es necesario considerar la cohomología $H^q(B\mathbb{Z}_{p^i};\mathbb{Z}_p)$. Por un lado, sabemos que $B\mathbb{Z}_{p^i}$ es un espacio $K(\mathbb{Z}_{p^i},1)$, y por otro lado el espacio lente $L^\infty_{p^i}$, con grupo fundamental $\pi_1(L^\infty_{p^i}) \cong \mathbb{Z}_{p^i}$, es también un espacio $K(\mathbb{Z}_{p^i},1)$ ([5]), de donde $B\mathbb{Z}_{p^i} \simeq L^\infty_{p^i}$. Del Teorema de Coeficientes Universales en Cohomología ([5, pp.195]) y de la cohomología de L_{p^i} ([8, pp.92]), obtenemos que

$$H^q(B\mathbb{Z}_{p^i};\mathbb{Z}_p) \cong H^q(L^\infty_{p^i};\mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & q = 0 \\ \mathbb{Z}_{p^i}, & 1 < q = 2k \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De esta manera deducimos que

$$H^{2k+1}(B\mathbb{Z}_{p^\infty};\mathbb{Z}_p) = \varprojlim H^{2k+1}(B\mathbb{Z}_{p^i};\mathbb{Z}_p) = 0,$$

en vista de que $H^{2k+1}(B\mathbb{Z}_{p^i};\mathbb{Z}_p) = 0$. Por otro lado, consideremos al espacio clasificante $B\mathbb{Z}_{p^{q-1}}$ como subcomplejo propio de $B\mathbb{Z}_{p^q}$. En tal caso, el homomorfismo inducido por la inclusión en cohomología par $H^{2k}(B\mathbb{Z}_{p^q};\mathbb{Z}_p) \to H^{2k}(B\mathbb{Z}_{p^{q-1}};\mathbb{Z}_p)$ es un isomorfismo por lo que se obtiene la igualdad

$$H^{2k}(B\mathbb{Z}_{p^\infty};\mathbb{Z}_p) = \varprojlim H^{2k}(B\mathbb{Z}_{p^i};\mathbb{Z}_p) = \varprojlim \mathbb{Z}_{p^i} = \mathbb{Z}_p.$$

Además, por la proposición 3F.5 en [5] se tiene que

$$H^{2k}(B\mathbb{Z}_{p^\infty};\mathbb{Z}_p) = \varprojlim H^{2k}(B\mathbb{Z}_{p^i};\mathbb{Z}_p) \cong H^{2k}(B\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p)$$

Finalmente por el lema (4.1) los grupos $H^{2k}(B\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p)$ conforman un anillo polinomial $\mathbb{Z}_p[\beta]$, don β de grado 2. De aquí existe un isomorfismo $H^*(B\mathbb{Z}_{p^\infty};\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[\beta]$, con β un generador de grado 2. $\square$

En el siguiente resultado mostraremos la relación entre los grupos de automorfismos de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y el de $\mathbb{Z}_p$. Al ser $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ el límite directo $\varinjlim \mathbb{Z}_{p^i}$ se tiene que $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigoplus \mathbb{Z}_{p^i}/H$, donde H es el subgrupo de $\bigoplus \mathbb{Z}_{p^i}$ generado por los elementos de la forma

$$(g_1, g_2 - g_1, g_3 - g_2, \cdots),$$

para $g_i \in \mathbb{Z}_{p^i}$. Observemos que la inclusión $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ induce el homomorfismo

$$r : Aut(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \longrightarrow Aut(\mathbb{Z}_p)$$

dado por restricción.

Lema 4.4. *El homomorfismo r es un epimorfismo que se escinde.*

Demostración. Recordemos que los automorfismos de $\mathbb{Z}_{p^i}$, para $i \geq 1$, están dados por multiplicación por un entero primo relativo con p; de aquí, la inclusión $\mathbb{Z}_{p^i} \subset \mathbb{Z}_{p^{i+1}}$ induce el epimorfismo,

$$Aut(\mathbb{Z}_{p^{i+1}}) \longrightarrow Aut(\mathbb{Z}_{p^i}), \qquad \forall i \geq 1$$

obtenido por restricción. Por la definición de $Aut(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \varprojlim Aut(\mathbb{Z}_{p^i})$ se obtiene que r es epimorfismo. Por otro lado, sabemos que $Aut(\mathbb{Z}_{p^i}) \cong U(p^i)$, el grupo de unidades, tiene orden $p^{i-1}(p-1) = p^i - p^{i-1}$ y, como $p-1$ es primo relativo con p^{i-1}, se sigue que existe H subgrupo de $Aut(\mathbb{Z}_{p^i})$ de orden $p-1$, para toda $i \geq 1$ ([4, Teo.9.3.1]). Finalmente, al ser $Aut(\mathbb{Z}_p)$ cíclico de orden $p-1$ consideramos el homomorfismo

$$s_i : Aut(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H \subset Aut(\mathbb{Z}_{p^i})$$

para observar que $Aut(\mathbb{Z}_{p^i}) \to Aut(\mathbb{Z}_p)$ es epimorfismo y se escinde. Con los homomorfismos s_i se construye la escición para r. □

Con las observaciones que ya tenemos podemos dar respuesta al problema de realización de un anillo polinomial en una variable de cierto grado par.

Teorema 4.5. *Para p primo mayor que 2, el anillo polinomial $\mathbb{Z}_p[y]$, con generador de grado $2p-2$, puede ser realizado como anillo de cohomología.*

Demostración. Recordemos que $Aut(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ actúa en $B\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Del resultado anterior se obtiene que $\Gamma = Aut(\mathbb{Z}_p)$ actúa sobre $B\mathbb{Z}_{p^\infty}$. No obstante, no sabemos si Γ actúa de manera libre sobre $B\mathbb{Z}_{p^\infty}$, así que tomaremos $B\mathbb{Z}_{p^\infty} \times E\Gamma$ en lugar de $B\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Así, por el Teorema 2.1 se tiene un isomorfismo

$$H^*(E_\Gamma^{B\mathbb{Z}_{p^\infty}}; \mathbb{Z}_p) \cong H^*(E\Gamma \times B\mathbb{Z}_{p^\infty}; \mathbb{Z}_p)^\Gamma \cong H^*(B\mathbb{Z}_{p^\infty}; \mathbb{Z}_p)^\Gamma.$$

Por un lado, del Lema 4.3 se desprende que

$$H^l(B\mathbb{Z}_{p^\infty}; \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad l = 2k+1 \\ \\ \mathbb{Z}_p, & \text{si} \quad l = 2k. \end{cases}$$

Además, de dicho resultado también tenemos que $H^{2k}(B\mathbb{Z}_{p^\infty}; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p \cong H^{2k}(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$. Por otro lado, de los cálculos al inicio de la sección y del Lema 4.3, sabemos que $H^{2k}(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)^\Gamma \cong \mathbb{Z}_p[y]$, con $|y| = 2p-2$. Concluimos entonces que

$$H^*(E_\Gamma^{B\mathbb{Z}_{p^\infty}}; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[y],$$

donde $|y| = 2p-2$. □

Notemos que en la prueba anterior se obtuvo un generador de dimensión $2p-2 = 2(p-1) = 2|Aut(\mathbb{Z}_p)|$. Así, al considerar un subgrupo Γ de $Aut(\mathbb{Z}_p)$, con $|\Gamma| = d$, el anillo que se realiza es $\mathbb{Z}_p[y]$, cuyo generador y tiene grado $2d$.

Con el auxilio del resultado anterior, así como la observación de arriba, es posible realizar anillos con un mayor número de generadores y grados distintas a $p-1$, como mostramos a continuación.

Teorema 4.6. *Consideremos un primo p mayor a 2, d un divisor de $p-1$, y un natural n tal que $n < p$. Entonces el anillo polinomial*

$$\mathbb{Z}_p[y_1, y_2, \ldots, y_n], \qquad |y_i| = 2id$$

puede ser realizado como anillo de cohomología.

Demostración. Tomemos $X = (B\mathbb{Z}_{p^\infty})^n$. Por la fórmula de Kunneth para cohomología tenemos que $H^*(X; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$, con $|\beta_i| = 2$ para todo grado i. Enseguida exhibiremos que el grupo $\Gamma = (\mathbb{Z}_d)^n \oplus \Sigma_n$ actúa sobre X.

Recordemos que el grupo de automorfismos $Aut(\mathbb{Z}_{p^i})$ tiene orden $p^{i-1}(p-1)$, con $i \geq 1$, y como $p^{i-1}, p-1$ son primos relativos, para cualquier divisor d de $p-1$ el grupo $Aut(\mathbb{Z}_{p^i})$ tiene un subgrupo de orden d ([4, Teo.9.3.1]), digamos $\mathbb{Z}_d$. Además, usando el Lema 4.4 podemos considerar a $\mathbb{Z}_d$ como subgrupo de $Aut(\mathbb{Z}_{p^\infty})$, por lo que $\mathbb{Z}_d$ actúa en $B\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Finalmente, tomemos el grupo simétrico Σ_n actuando en X mediante permutaciones para obtener una acción de Γ en X.

Como hemos hecho antes, reemplazaremos a X por el producto cartesiano $X \times E\Gamma$, ya que la acción de Γ sobre $X \times E\Gamma$ sí es libre. De esta manera, por el teorema 2.1

$$\begin{aligned} H^*(E_\Gamma^X; \mathbb{Z}_p) &\cong H^*(X \times E\Gamma; \mathbb{Z}_p)^\Gamma \\ &\cong H^*(X; \mathbb{Z}_p)^\Gamma \\ &\cong \mathbb{Z}_p[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]^\Gamma. \end{aligned}$$

Debemos analizar entonces las clases de $\mathbb{Z}_p[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]$ que son invariantes bajo Γ.

Por los cálculos anteriores sabemos que un polinomio que pertenezca a $\mathbb{Z}_p[\beta_1, \ldots, \beta_n]$ será invariante bajo la acción de $\mathbb{Z}_d$ si es un polinomio en las potencias β_i^d. Por otro lado, un polinomio en las variables $y_1, \ldots, y_n$ será invariante bajo la acción de Σ_n si es un polinomio simétrico; en particular, se podrá expresar en términos de polinomios simétricos elementales $e_i^n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Concluimos que

$$\mathbb{Z}_p[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]^\Gamma \cong \mathbb{Z}_p[y_{2d}, y_{4d}, \cdots, y_{2nd}]$$

donde y_{2i} está dado por $e_i^n(\beta_1^d, \beta_2^d, \cdots, \beta_n^d)$ y tiene grado $2id$. $\square$

5 Conclusiones

El anillo de cohomología de un espacio es un invariante de gran relevancia dentro de la topología algebraica pues permite distiguir espacios topológicos, aún en el caso en el que estos tengan grupos de homología y cohomología isomorfos.

La realización de un anillo como el anillo de cohomología de cierto espacio permite dar una interpretación geométrica a las propiedades de dicho anillo. En particular, las clases de cohomología que surgen en este contexto, sus productos y sus grados, pueden caracterizar a los elementos del anillo en cuestión.

El método de realización de anillos polinomiales explicado en el presente trabajo, tomado del libro [5], tiene ciertas limitaciones al estar basado en la teoría de espacios cubrientes y espacios clasificantes. Distintos métodos han sido usados para resolver el problema de realización de Steenrod: teoría de grupos de Lie, cohomología de grupos, grupos topológicos, etc. El trabajo [2] proporciona el *estado del arte* del problema y describe con detalle otras técnicas empleadas en su solución.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. De igual forma, los autores agradecen los comentarios del revisor para mejorar el presente.

Sofía Ibarra Trejo
Unidad Académica de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Zacatecas,
Zacatecas, México.
sofiaibarratrejo@gmail.com

Miguel A. Maldonado
Unidad Académica de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Zacatecas,
Zacatecas, México.
mmaldonado@uaz.edu.mx

Referencias

[1] Aguadé J., *Realizability of cohomology algebras: a survey*, Publicacions mathematiques, Universidad Autónoma de Barcelona, **26** (1982) 25-68.

[2] Andersen, K.K.S., Grodal, J., *The Steenrod problem of realizing polynomial cohomology rings*, Journal of Topology 1(2008), 747-760

[3] Félix, Y., Tanré, D., *Topologie Algébrique*, Editorial Dunod, 2010.

[4] Hall M., *The Theory of Groups*, Dover New York, 2018.

[5] Hatcher A., *Algebraic Topology*, Princeton University Press, 2000.

[6] Steenrod N.E., *The cohomology algebra of a space*, Enseignement Math. **2** 7 (1961), 153-178.

[7] tom Dieck T., *Algebraic Topology*, European Mathematical Society, 2008.

[8] Whitehead G.W., *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1978.