**Morfismos**, Vol. 25, No. 1, 2021, pp. 23–40

# El problema de realización de Nielsen para superficies no orientables *

Nestor Colin Hernandez

**Resumen**

Gonçalves, Guaschi y Maldonado probaron en [4] que el grupo modular $Mod(N_g; k)$ de una superficie no orientable con $k$ puntos marcados se puede identificar con un subgrupo del grupo modular $Mod(S_{g-1}; 2k)$ de la doble cubierta orientable con $2k$ puntos marcados. En este trabajo se estudia el espacio de Teichmüller de una superficie no orientable con puntos marcados (vista como superficie de Klein) y se muestra que puede identificarse con un subespacio del espacio de Teichmüller de la doble cubierta orientable con puntos marcados. Estos hechos se usan para probar que todo subgrupo finito de $Mod(N_g; k)$ se puede levantar de manera isomorfa a un subgrupo del grupo de difeomorfismos *Diff*$(N_g; k)$.

*2020 Mathematics Subject Classification: 57K20, 30F50, 32G15, 30F60, 30F10, 57M07.*
*Keywords and phrases: Grupo modular, superficies no orientables, superficies de Klein, espacio de Teichmüller, problema de realización de Nielsen.*

## 1. Introducción

Sea $S_g$ una superficie compacta, conexa y sin frontera de género $g$ y $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ un subconjunto finito de $S_g$ de cardinalidad $k \geq 0$. Denotamos por *Diff*$(S_g; k)$ al grupo de difeomorfismos de $S_g$ que dejan

*Este trabajo es parte de la tesis de doctorado del autor escrita bajo la dirección del Dr. Miguel A. Xicoténclatl Merino en el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV-IPN.

fijo el conjunto $X$. Si $S_g$ es orientable, denotamos por $\mathit{Diff}^+(S_g;k)$ al subgrupo formado por todos los elementos de $\mathit{Diff}(S_g;k)$ que preservan la orientación. El grupo modular de $S_g$ con $k$ puntos marcados se define como

$$Mod(S_g;k) := \begin{cases} \mathit{Diff}^+(S_g;k)/\mathit{Diff}_0(S_g;k) & \text{si } S_g \text{ es orientable} \\ \mathit{Diff}(S_g;k)/\mathit{Diff}_0(S_g;k) & \text{si } S_g \text{ es no orientable,} \end{cases}$$

donde $\mathit{Diff}_0(S_g;k)$ es el subgrupo de todos los elementos en $\mathit{Diff}(S_g;k)$ que son isotópicos a la identidad. Si el conjunto de puntos marcados es vacío, omitimos $k$ en la notación y solo escribimos $\mathit{Diff}(S_g)$, $\mathit{Diff}^+(S_g)$, $\mathit{Diff}_0(S_g)$, $Mod(S_g)$.

En 1932, J. Nielsen formuló la pregunta de si los subgrupos finitos del grupo modular pueden actuar sobre $S_g$ por difeomorfismos, esto es, si todo grupo finito $G$ se puede levantar de manera isomorfa a un grupo $\widetilde{G} \subset \mathit{Diff}(S_g)$. En el caso de una superficie orientable $S_g$ sin puntos marcados, Nielsen resolvió parcialmente este problema para grupos cíclicos, otros casos especiales fueron estudiados por distintos autores durante varios años, ver [16]. Es bien conocido que para $g \geq 2$ la superficie $S_g$ admite distintas métricas hiperbólicas de curvatura constante $-1$ y en este contexto S. Kerckhoff en [8] dio una respuesta positiva al *problema de realización de Nielsen.*

**Teorema 1.1** (Kerckhoff [8])**.** *Todo subgrupo finito de $Mod(S_g)$ puede realizarse como un grupo de isometrías de alguna estructura hiperbólica en $S_g$.*

Más aún, el grupo modular $Mod(S_g)$ actúa mediante pullback sobre el espacio de todas las métricas hiperbólicas en $S_g$, el llamado espacio de Teichmüller $\mathscr{T}(S_g)$. Es bien sabido que el espacio $\mathscr{T}(S_g)$ es homeomorfo a una bola de dimensión $6g-6$ y la acción de $Mod(S_g)$ en $\mathscr{T}(S_g)$ es propia y discontinua. Entonces el Teorema 1.1 es equivalente al siguiente:

**Teorema 1.2** (Kerckhoff [8])**.** *Todo subgrupo finito de $Mod(S_g)$ actuando en $\mathscr{T}(S_g)$ tiene un punto fijo en $\mathscr{T}(S_g)$.*

En el caso de una superficie orientable $S_g$ con $k$ puntos marcados, el espacio de Teichmüller $\mathscr{T}_k(S_g)$ se define de manera similar y S. Wolpert prueba en [15] que todo subgrupo finito que actúa en el espacio $\mathscr{T}_k(S_g)$ a través de isometrías de Weil-Petersson, tiene un punto fijo en $\mathscr{T}_k(S_g)$. Se sabe además que el grupo modular $Mod(S_g;k)$ actúa por isometrías de Weil-Petersson en el espacio $\mathscr{T}_k(S_g)$. Más aún, si $Mod^{\pm}(S_g;k)$ denota el grupo modular extendido, es decir, el grupo que considera todos los difeomorfismos sin importar si preservan la orientación, entonces todo grupo de isometrías de Weil-Petersson es isomorfo a un subgrupo de $Mod^{\pm}(S_g; k)$ (ver [10]). Así pues, el resultado de S. Wolpert extiende el problema de realización de Nielsen al caso de subgrupos finitos de $Mod^{\pm}(S_g; k)$:

**Teorema 1.3** (Wolpert [15])**.** *Todo subgrupo finito de $Mod^{\pm}(S_g; k)$ que actúa en el espacio de Teichmuller $\mathscr{T}_k(S_g)$ tiene un punto fijo en $\mathscr{T}_k(S_g)$.*

El propósito de este trabajo es extender el resultado anterior al caso del grupo modular de una superficie no orientable con $k$ puntos marcados $Mod(N_g; k)$. Aunque este resultado es conocido entre los expertos, hasta donde sabemos no existe una demostración en la literatura, siendo este uno de nuestros principales intereses. Es bien sabido que el espacio de Teichmüller se puede definir de manera equivalente vía estructuras conformes o complejas en superficies de Riemann. En este sentido, toda superficie no orientable se puede dotar de una estructura dianalítica que la hace una superficie de Klein y el correspondiente espacio de Teichmüller se define como el espacio cociente de todas las estructuras dianalíticas en $N_g$ módulo el grupo de difeomorfismos isotópicos a la identidad. Al extender de este modo la teoría de Teichmüller, el problema de realización de Nielsen para el caso no orientable se deduce del caso clásico al pasar a la doble cubierta orientable. El resultado principal es el siguiente:

**Teorema 1.4.** *Todo subgrupo finito $G \subset Mod(N_g; k)$ actuando en $\mathscr{T}_k(N_g)$ fija algún punto de $\mathscr{T}_k(N_g)$.*

El artículo se encuentra divido de la siguiente forma. En la sección 2 recordamos la noción de superficie de Klein y damos un modelo estándar de la doble cubierta orientable de $N_g$. En la sección 3 describimos la relación establecida en [4] y [6] entre los grupos modulares $Mod(N_g; k)$ y $Mod(S_{g-1}; 2k)$ vía la doble cubierta orientable $\pi : S_{g-1} \to N_g$. En la sección 4 definimos el espacio de Teichmüller de una superficie de Klein a través de estructuras dianalíticas y probamos que la función $\pi^* : \mathscr{T}_k(N_g) \to \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1})$ inducida por la doble cubierta orientable $\pi : S_{g-1} \to N_g$ es inyectiva. Finalmente, en la sección 5 demostramos el Teorema 1.4 y comentamos brevemente el problema de si el grupo infinito $Mod(\Sigma_g)$ se puede realizar como un grupo de difeomorfismos de $\Sigma_g$

A lo largo de este trabajo denotamos por $\Sigma = \Sigma_g^k$ a una superficie conexa sin frontera de género $g$, con un conjunto finito de $k$ puntos removidos, donde $g$ y $k$ satisfacen $2 - g - k < 0$, a menos que se indique lo contrario (con esta condición garantizamos que las superficies son hiperbólicas). Para enfatizar que una superficie es orientable escribiremos $S = S_g^k$ y del mismo modo usaremos $N = N_g^k$ para una superficie no orientable. En la mayoría de los casos, omitiremos el subíndice $g$ y el superíndice $k$, infiriendo ambos del contexto. Finalmente, cuando se requiera y sin hacer mención, pensaremos a un elemento $f \in \mathit{Diff}(\Sigma_g; k)$ como un elemento de $\mathit{Diff}(\Sigma_g^k)$ simplemente tomando su restricción a la superficie $\Sigma_g^k$ removiendo los $k$ puntos marcados.

## 2. Superficies de Klein

Recordemos que toda superficie orientable $S_g$ puede ser dotada de una estructura analítica que la hace una superficie de Riemann. Similarmente, las superficies no orientables $N_g$ admiten estructuras dianalíticas y con ello obtenemos las superficies de Klein, como una generalización natural de la superficies de Riemann. Dedicamos esta sección a recordar algunas definiciones y construcciones básicas que nos serán de utilidad en futuras secciones, además recordaremos la construcción de la doble cubierta orientable de la superficie $N_g$ con $k$ puntos marcados. Las principales referencias empleadas son [1] y [14].

Recordemos que si $A$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{C}$ una función continua cuyas derivadas parciales existen, se definen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Diremos que el mapeo $f$ es *analítico* si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ y *antianalítico* si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sobre $A$. Si el mapeo $f$ es analítico o antianalítico en cada componente conexa $V$ de $A$ decimos que el mapeo es *dianalítico.* Sea $\Sigma$ una superficie conexa, sin frontera, posiblemente con un conjunto finito de puntos removidos y con una estructura suave. Un atlas $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de la superficie $\Sigma$ se dice ser *dianalítico* si todas las funciones de transición son dianalíticas; si las funciones de transición son analíticas (conformes, holomorfas) el atlas $\mathcal{U}$ se dice ser *analítico* (conforme, holomorfo). Si la superficie tiene puntos marcados ó pinchazos (puntos removidos), se requiere adicionalmente que cada punto marcado tenga una vecindad conformemente equivalente al disco unitario sin el origen en $\mathbb{C}$ (sin esta condición, una vecindad de un punto marcado también podría ser conformemente equivalente a un cilindro). Cada pareja $(U_i, \varphi_i)$ se dice una *carta dianalítica o analítica* según sea el caso. Dos atlas dianalíticos (respectivamente analíticos) $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son *equivalentes* si $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ es una atlas dianalítico (respectivamente analítico). A una clase de equivalencia de atlas dianalíticos $\mathfrak{X}$ se conoce como una *estructura dianalítica* (respectivamente *analítica*). Además, si la superficie $\Sigma$ es orientable, denotamos por $\mathcal{M}(\Sigma)$ al conjunto de todas las estructuras analíticas sobre la superficie $\Sigma$ que coinciden con la orientación y que son compatibles con la estructura diferenciable; si la superficie $\Sigma$ es no orientable, $\mathcal{M}(\Sigma)$ denotará al conjunto de todas las estructuras dianalíticas sobre la superficie $\Sigma$ que son compatibles con la estructura diferenciable de $\Sigma$.

**Definición 2.1.** Una *superficie de Klein* es una superficie topológica $\Sigma$ junto con una estructura dianalítica $\mathfrak{X}$. Si la estructura $\mathfrak{X}$ es analítica entonces $\Sigma$ es una *superficie de Riemann.*

**Ejemplo 2.2.** Es bien conocido que para toda superficie compacta, conexa, de género $g$ y sin frontera $\Sigma_g$ existe una estructura dianalítica $\mathfrak{X}$ (ver [1], Teorema 1.7.1). Consideremos una superficie de género $g$ con $k$ puntos marcados $\Sigma_g^k$ cuya característica de Euler es negativa $\chi(\Sigma_g^k) < 0$, i.e. la superficie es hiperbólica. Luego, su cubierta universal es el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ y podemos ver a $\Sigma_g^k$ como el cociente de $\mathbb{H}^2$ por el grupo de transformaciones cubrientes $\Gamma$. Al ser éstas isometrías del $\mathbb{H}^2$, se tiene que $\Gamma$ es un grupo cristalográfico no euclidiano el cual es isomorfo a $\pi_1(\Sigma_g^k)$. Como el grupo $\Gamma$ no contiene elementos de torsión, entonces la proyección induce una estructura dianalítica $\mathfrak{X}$ en el espacio cociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ y así $\Sigma_g^k$ es una superficie de Klein. Más aún, si la superficie $\Sigma_g^k$ es orientable, $\Gamma$ es un grupo Fuchsiano y obtenemos una superficie de Riemann.

**Definición 2.3.** Un *morfismo* de superficies de Klein $f : (\Sigma, \mathfrak{X}) \to (\Sigma', \mathfrak{Y})$ o un *mapeo dianalítico* es un mapeo $f : \Sigma \to \Sigma'$ tal que para todo $x \in \Sigma$ existen cartas dianalíticas $(U, \phi) \in \mathfrak{X}$ y $(V, \psi) \in \mathfrak{Y}$ alrededor de $x$ y $f(x)$ respectivamente tales que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es un mapeo dianalítico en $\phi(U)$. Si las superficies $(\Sigma, \mathfrak{X})$ y $(\Sigma', \mathfrak{Y})$ son superficies de Riemann, el mapeo $f$ es un *morfismo* si $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es un mapeo analítico si $f$ preserva la orientación o antianalítico si la invierte.

**Definición 2.4.** Para todos $f \in \mathit{Diff}(\Sigma)$ y $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(\Sigma)$ definimos la *estructura inducida (o pullback) bajo* $f$ como la única estructura $f^*\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(\Sigma)$ tal que el difeomorfismo $f : (\Sigma, f^*\mathfrak{X}) \to (\Sigma, \mathfrak{X})$ es un morfismo.

**Nota 2.5.** La existencia y unicidad del pullback $f^*\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(\Sigma)$ son consecuencias de [1], Teorema 1.5.2 y es tal que si $\Sigma$ es una superficie no orientable, entonces el mapeo $f : (\Sigma, f^*\mathfrak{X}) \to (\Sigma, \mathfrak{X})$ es dianalítico, mientras que si la superficie es orientable, el mapeo $f : (\Sigma, f^*\mathfrak{X}) \to (\Sigma, \mathfrak{X})$ es analítico si $f$ preserva la orientación o antianalítico si la invierte. Por otro lado, la unicidad de la estructura pullback implica que si $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y} \in \mathcal{M}(\Sigma)$ son dos estructuras tales que $f : (\Sigma, \mathfrak{Y}) \to (\Sigma, \mathfrak{X})$ es un morfismo, entonces $f^*\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$.

**Doble Cubierta Orientable.** Para toda superficie de Klein $(\Sigma, \mathfrak{X})$ es posible construir tres dobles cubiertas: la doble cubierta analítica, la doble cubierta orientable y la doble cubierta de Schottky; cuando la superficie es conexa, sin frontera y con un número finito de puntos removidos, la doble cubierta analítica y orientable coinciden. A continuación estudiamos la doble cubierta orientable de una superficie no orientable $N_g$ con $k$ puntos removidos, la cual será de utilidad para establecer la relación entre los grupos modulares $Mod(N_g; k)$ y $Mod(S_{g-1}; 2k)$ y los espacios de Teichmüller $\mathscr{T}_k(N_g)$ y $\mathscr{T}_{2k}(S_{g-1})$.

**Definición 2.6.** Una *doble cubierta orientable de una superficie de Klein no orientable* $(\Sigma, \mathfrak{X})$ es una superficie de Riemann $(S, \mathfrak{X}^0)$ junto con un mapeo dianlítico $\pi : S \to \Sigma$ que es una doble cubierta no ramificada de $\Sigma$ y una involución $\sigma : S \to S$ antianalítica tales que $\pi \circ \sigma = \pi$. Denotaremos a la doble cubierta orientable como $(S, \pi, \sigma)$ o simplemente por $\pi : S \to \Sigma$.

La doble cubierta orientable $(S, \pi, \sigma)$ de una superficie de Klein es única salvo isomorfismo de superficies de Riemann: si $(S', \pi', \sigma')$ es otra doble cubierta orientable de $\Sigma$, existe un único isomorfismo analítico $f : S' \to S$ tal que $\pi' = \pi \circ f$. La demostración de la existencia puede consultarse en [1], Teorema 1.6.7 y el mismo argumento puede adaptarse al caso de una superficie con puntos marcados.

**Nota 2.7.** En la literatura, una pareja $(S, \sigma)$ conformada por una superficie de Riemann $S$ y una involución $\sigma : S \to S$ antianalítica se conoce como *una superficie de Riemann simétrica.* No es difícil ver que el espacio de órbitas $\Sigma = S/\langle\sigma\rangle$ obtenido de la acción de $\sigma$ es una superficie de Klein. Recíprocamente, toda superficie de Klein $\Sigma$ se puede obtener a partir de una superficie de Riemann simétrica $(S, \sigma)$ vía la doble cubierta orientable $(S, \pi, \sigma)$. Así pues, la construcción de la doble cubierta orientable define una equivalencia entre la categoría de superficies de Klein y la categoría de superficies de Riemann simétricas (ver [2], Sección 4 para más detalles).

**Definición 2.8.** Sea $(S, \pi, \sigma)$ la doble cubierta orientable de una superficie de Klein no orientable $N$. Para toda $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(N)$, definimos *la estructura pullback* $\pi^*\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(S)$ como la única estructura tal que el mapeo $\pi : (S, \pi^*\mathfrak{X}) \to (N, \mathfrak{X})$ es dianalítico.

**Nota 2.9.** Si $(S, \pi, \sigma)$ es la doble cubierta orientable de la superficie $N$, entonces no es difícil ver que para toda $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(N)$ la involución $\sigma : (S, \pi^*\mathfrak{X}) \to (S, \pi^*\mathfrak{X})$ es antianalítica con respecto a la estructura pullback $\pi^*(\mathfrak{X})$.

**Construcción de la doble cubierta orientable.** *Caso sin puntos marcados.* Si $N_g$ es una superficie no orientable, compacta, conexa y sin frontera de género $g$, la doble cubierta orientable puede ser construida de la siguiente forma. Sea $S_{g-1}$ una superficie orientable compacta, conexa y sin frontera de género $g-1$ encajada en $\mathbb{R}^3$ tal que $S_{g-1}$ es invariante bajo reflexiones en el los planos $xy$, $yz$ y $xz$. Consideremos el homeomorfismo $\sigma : S_{g-1} \to S_{g-1}$ dado por

$$\sigma(x, y, z) = (-x, -y - z),$$

el cual invierte la orientación. Bajo la acción de $\sigma$ en $S_{g-1}$, el espacio de órbitas $S_{g-1}/\langle\sigma\rangle$ es homeomorfo a la superficie no orientable $N_g$ y el mapeo cociente asociado

$$\pi : S_{g-1} \to N_g$$

es una doble cubierta orientable (topológica) de $N_g$. En la Figura 1 mostramos el modelo descrito de la doble cubierta orientable de $N_g$.

Más aún, si $(N_g, \mathfrak{X})$ es una superficie de Klein, dotamos a $S_{g-1}$ con la estructura pullback $\mathfrak{X}^0 = \pi^*\mathfrak{X}$. Con respecto a dicha estructura, el mapeo $\pi : S_{g-1} \to N_g$ es dianalítico y por la Nota 2.9 la involución $\sigma : S \to S$ es antianalítica. Así pues, $(S_{g-1}, \pi, \sigma)$ es una doble cubierta de la superficie de Klein $N_g$.

*Caso de puntos marcados.* Consideremos el conjunto de puntos marcados $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ de $N_g$ y sea $\widetilde{X} = \pi^{-1}(X)$ el conjunto de puntos marcados de $S_{g-1}$. Si $\widetilde{x}_i \in S_{g-1}$ es tal que $\pi(\widetilde{x}_i) = x_i$ para toda $i = 1, \ldots, k$, entonces

$$\widetilde{X} = \{\widetilde{x}_1, \sigma(\widetilde{x}_1), \widetilde{x}_2, \sigma(\widetilde{x}_2), \ldots, \widetilde{x}_k, \sigma(\widetilde{x}_k)\}.$$

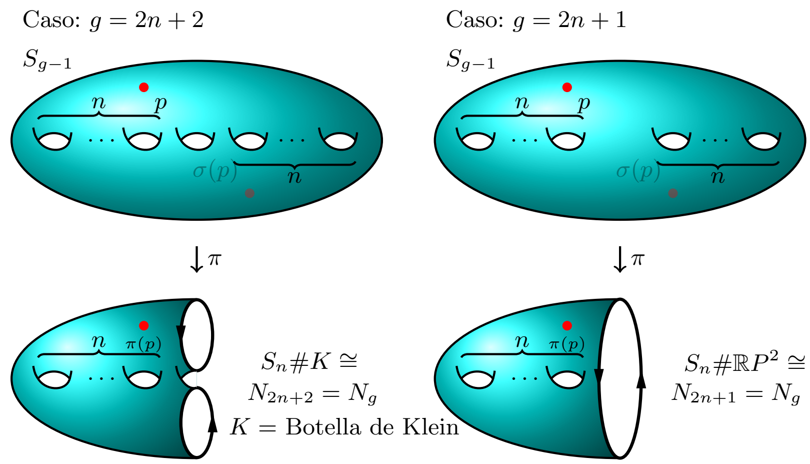


Figura 1: Doble cubierta orientable de una superficie no orientable $N_g$.

Removamos el conjunto de puntos marcados $X$ y $\widetilde{X}$ de $N_g$ y $S_{g-1}$ respectivamente, obteniendo las superficies $N_g^k$ y $S_{g-1}^{2k}$. Por el ejemplo 2.2, podemos dotar a la superficie $N_g^k$ de una estructura dianalítica $\mathfrak{X}$. Un argumento similar del caso compacto muestra que $(S_{g-1}^{2k}, \pi, \sigma)$ es una doble cubierta orientable de la superficie de Klein $N_g^k$.

## 3. Grupos modulares y la doble cubierta orientable.

En esta sección, recordaremos la relación que existe entre los grupos modulares $Mod(N_g; k)$ y $Mod(S_{g-1}; 2k)$ vía la doble cubierta orientable $\pi : S_{g-1} \to N_g$. De aquí en adelante, es importante observar que existen distintas maneras de pensar en el grupo modular de una superficie con puntos marcados. Por ejemplo, se puede considerar a la superficie de género $g$ con $k$ puntos removidos $\Sigma_g^k$ y al correspondiente grupo modular $Mod(\Sigma_g^k)$, donde el conjunto de puntos marcados es vacío. No es difícil ver que existe un isomorfismo

$$Mod(\Sigma_g^k) \cong Mod(\Sigma_g; k).$$

De este modo, podemos pensar de manera indistinta en una superficie con puntos marcados o con puntos removidos. La siguiente proposición será de utilidad para definir un homomorfismo $\phi : Mod(N_g; k) \to Mod(S_{g-1}; 2k)$.

**Proposición 3.1.** *Sea* $(S_{g-1}, \pi, \sigma)$ *la doble cubierta orientable de la superficie no orientable* $N_g$ *y sea* $f \in \mathit{Diff}(N_g; k)$*. Entonces* $f$ *admite dos levantamientos uno de los cuales preserva la orientación y será denotado por* $\widetilde{f} \in \mathit{Diff}^{+}(S_{g-1}; 2k)$*.*

*Demostración.* Notemos que $\pi' := f \circ \pi : S_{g-1} \to N_g$ es una doble cubierta no ramificada de $N_g$ y es tal que $\pi' \circ \sigma = \pi'$. Eligiendo adecuadamente las estructuras en $S_{g-1}$ y $N_g$, tenemos que $(S_{g-1}, \pi', \sigma)$ es una doble cubierta orientable de $N_g$. Así, por la unicidad de la doble cubierta orientable, existe un isomorfismo analítico $\widetilde{f} : S_{g-1} \to S_{g-1}$ tal que $\pi' = \pi \circ \widetilde{f}$, i.e. el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
S_{g-1} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"'] & S_{g-1} \arrow[d, "\pi"] \\
N_g \arrow[r, "f"'] & N_g.
\end{tikzcd}$$

Luego el difeomorfismo $\widetilde{f} : S_{g-1} \to S_{g-1}$ es un levantamiento de $f$ que preserva la orientación y claramente $\sigma \circ f$ es el otro levantamiento. Finalmente, si $X$ es el conjunto de puntos marcados de $N_g$ y $\widetilde{X} = \pi^{-1}(X)$ es el conjunto de puntos marcados de $S_{g-1}$, entonces por la conmutatividad del diagrama, se tiene que $\widetilde{f}(\widetilde{X}) = \widetilde{X}$, de esto se sigue que $\widetilde{f} \in \mathit{Diff}^{+}(S_{g-1}; 2k)$. □

De acuerdo a la proposición anterior, para cualquier difeomorfismo $f \in \mathit{Diff}(N_g; k)$ existe una forma natural de elegir un levantamiento $\widetilde{f} \in \mathit{Diff}^{+}(S_{g-1} : 2k)$. Definimos el homomorfismo

$$\rho : \mathit{Diff}(N_g; k) \to \mathit{Diff}^{+}(S_{g-1}; 2k) \qquad f \mapsto \widetilde{f},$$

y notemos que $\rho$ induce un homomorfismo entre los correspondientes grupos grupos modulares

$$\phi : Mod(N_g; k) \to Mod(S_{g-1}; 2k) \qquad [f] \mapsto [\rho(f)].$$

Más aún, si $p_1 : \mathit{Diff}(N_g; k) \to Mod(N_g; k)$ y $p_2 : \mathit{Diff}^{+}(S_{g-1}; 2k) \to Mod(S_{g-1}; 2k)$ son las proyecciones canónicas, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Diff}(N_g;k) & \xrightarrow{\rho} & \mathit{Diff}^+(S_{g-1};2k) \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ Mod(N_g;k) & \xrightarrow{\phi} & Mod(S_{g-1};2k) \end{array}$$

El siguiente teorema fue probado en [6] en el caso sin puntos marcados, mientras que el caso general fue tratado en [4]. Lo incluimos aquí ya que tendrá un papel importante en las próximas secciones.

**Teorema 3.2** (Hope-Tillman [6], Gonçalves-Guaschi-Maldonado [4]). *Sea $N_g$ una superficie no orientable y sea $S_{g-1}$ su doble cubierta orientable. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $g \geq 3$, entonces $\phi : Mod(N_g) \to Mod(S_{g-1})$ es inyectivo.*
2. *Si $k \geq 1$, entonces $\phi : Mod(N_g;k) \to Mod(S_{g-1};2k)$ es inyectivo para toda $g \geq 1$.* □

## 4. Espacio de Teichmüller de Superficies de Klein

El espacio de Teichmüller puede ser definido de distintas formas, todas ellas equivalentes entre sí, cada una de las cuales resulta útil para estudiar propiedades especificas de este espacio. Una de estas definiciones es a través de estructuras conformes o complejas en una superficie de Riemann. En este sentido y ya que toda superficie se puede dotar de una estructura dianalítica o de superficie de Klein, resulta natural extender la definición del espacio de Teichmüller como el cociente del espacio de todas las estructuras dianalíticas módulo el grupo de difeomorfismos isotópicos a la identidad. El objetivo principal de esta sección es establecer una relación entre los espacios de Teichmüller de las superficies orientables y no orientables a través de la doble cubierta orientable.

Sea $\Sigma = \Sigma_g^k$ una superficie conexa, sin frontera de género $g$ y con un conjunto de $k$ puntos marcados y sea $\mathit{Diff}_0(\Sigma_g;k)$ el subgrupo de $\mathit{Diff}(\Sigma_g;k)$ de todos los difeomorfismos isotópicos a la identidad. Diremos que dos estructuras $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y} \in \mathcal{M}(\Sigma)$ son *Teichmüller equivalentes* si existe un difeomorfismo $f \in \mathit{Diff}_0(\Sigma_g;k)$ tal que el mapeo $f : (\Sigma, \mathfrak{X}) \to$

$(\Sigma, \mathfrak{Y})$ es un mapeo dianalítico; si $\Sigma$ es una superficie de Riemann requerimos de hecho que $f : (\Sigma, \mathfrak{X}) \to (\Sigma, \mathfrak{Y})$ sea un mapeo analítico. Equivalentemente, existe $f \in \mathit{Diff}_0(\Sigma_g; k)$ tal que $\mathfrak{X} = f^*\mathfrak{Y}$.

**Definición 4.1.** El *espacio de Teichmüller de una superficie de Klein* $\Sigma$, al cual denotamos por $\mathscr{T}_k(\Sigma_g)$, es el espacio de clases de equivalencia de Teichmüller de todas las estructuras en $\mathcal{M}(\Sigma)$. Los elementos del espacio $\mathscr{T}_k(\Sigma_g)$ serán denotados por $[\mathfrak{X}]$.

Notemos que la acción del grupo $\mathit{Diff}(\Sigma_g; k)$ en $\mathcal{M}(\Sigma)$ por pullbacks se restringe a una acción del grupo $\mathit{Diff}_0(\Sigma_g; k)$ y podemos ver al espacio de Teichmüller como el cociente

$$\mathscr{T}_k(\Sigma_g) = \mathcal{M}(\Sigma)/\mathit{Diff}_0(\Sigma_g; k).$$

De este modo, la acción del grupo $\mathit{Diff}(\Sigma; k)$ en el conjunto $\mathcal{M}(\Sigma)$ induce una acción en $\mathscr{T}_k(\Sigma_g)$ dada por:

$$\alpha \cdot [\mathfrak{X}] = [f^*\mathfrak{X}],$$

para todo $\alpha = [f] \in Mod(\Sigma_g; k)$ y $[\mathfrak{X}] \in \mathscr{T}_k(\Sigma_g)$. Por otro lado, el conjunto $\mathcal{M}(\Sigma)$ está dotado de una topología natural y damos a $\mathscr{T}_k(\Sigma_g)$ la topología cociente, bajo la cual resulta ser homeomorfo a $\mathbb{R}^{6g-6+2k}$ en el caso de una superficie orientable y a $\mathbb{R}^{3g-6+2k}$ en el caso de una superficie no orientable (ver [13], Teorema 2.2).

Estamos ahora en condiciones de establecer la relación entre los espacios de Teichmüller de una superficie no orientable y orientable. Consideremos la doble cubierta orientable $(S, \pi, \sigma)$ de una superficie de Klein $N$ y recordemos que para todo $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(N)$, el pullback $\pi^*\mathfrak{X}$ es la única estructura en $\mathcal{M}(S)$ tal que el mapeo $\pi : (S, \pi^*\mathfrak{X}) \to (N, \mathfrak{X})$ es dianalítico. Dicha asignación induce un mapeo de espacios de Teichmüller:

$$\pi^* : \mathscr{T}_k(N_g) \to \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1}) \qquad [\mathfrak{X}] \mapsto [\pi^*\mathfrak{X}],$$

el cual puede usarse para identificar a $\mathscr{T}_k(N_g)$ como subespacio de $\mathscr{T}_{2k}(S_{g-1})$ gracias al siguiente resultado.

**Lema 4.2.** *Sea $(S, \pi, \sigma)$ la doble cubierta orientable de una superficie de Klein no orientable $N$. Entonces el mapeo inducido por la doble cubierta*

$$\pi^* : \mathscr{T}_k(N_g) \to \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1})$$

*es inyectivo.*

*Demostración.* Sean $[\mathfrak{X}], [\mathfrak{Y}] \in \mathscr{T}_k(N_g)$ tales que $\pi^*([\mathfrak{X}]) = \pi^*([\mathfrak{Y}])$, es decir, $[\pi^*\mathfrak{X}] = [\pi^*\mathfrak{Y}]$. Por definición, existe $h \in \mathit{Diff}_0(S_{g-1}; 2k)$ tal que $h : (S, \pi^*\mathfrak{X}) \to (S, \pi^*\mathfrak{Y})$ es analítico. Consideremos los siguientes mapeos:

$$(S, \pi^*\mathfrak{X}) \xrightarrow{\sigma} (S, \pi^*\mathfrak{X}) \xrightarrow{h} (S, \pi^*\mathfrak{Y}) \xrightarrow{\sigma} (S, \pi^*\mathfrak{Y}).$$

Por la Nota 2.9 sabemos que la involución $\sigma$ es antianalítica con respecto a las estructuras $\pi^*\mathfrak{X}$ y $\pi^*\mathfrak{Y}$, luego la composición $\sigma \circ h \circ \sigma$ es un mapeo analítico. Por otro lado, $\sigma \circ h \circ \sigma \simeq \sigma \circ id \circ \sigma \simeq id \simeq h$ y ya que $h$ y $\sigma \circ h \circ \sigma$ son analíticos, entonces por la unicidad de los Teoremas de Teichmüller en el caso de puntos marcados (ver [3], Teorema 11.8 y [7], Corolario 7.2.3), se tiene que $\sigma \circ h \circ \sigma = h$. Así, existe $\widehat{h} : N \to N$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (S, \pi^*\mathfrak{X}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & (S, \pi^*\mathfrak{Y}) \arrow[d, "\pi"] \\ (N, \mathfrak{X}) \arrow[r, "\widehat{h}"] & (N, \mathfrak{Y}) \end{tikzcd}$$

Ahora bien, como $\pi \circ h$ y $\pi$ son dianalíticos, entonces por [1], Teorema 1.4.3 el mapeo $\widehat{h} : (N, \mathfrak{X}) \to (N, \mathfrak{Y})$ es dianalítico. Resta probar que $\widehat{h} \in \mathit{Diff}_0(N_g; k)$. Notemos que el homomorfismo $\phi : Mod(N_g; k) \to Mod(S_{g-1}; 2k)$ inducido por la doble cubierta orientable $\pi : S \to N$ satisface que

$$\phi([\widehat{h}]) = [h] = 1,$$

pero por el Teorema 3.2, sabemos que $\phi$ es inyectivo y de esto se sigue que $\widehat{h} \in \mathit{Diff}_0(N_g; k)$. $\square$

En el siguiente resultado, determinamos la imagen de $\pi^* : \mathscr{T}_k(N_g) \to \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1})$. La demostración del caso compacto es encontrada en [14], Teorema 4.5.1 y la extendemos aquí al caso de puntos marcados.

**Teorema 4.3.** *Sea $(S, \sigma, \pi)$ la doble cubierta orientable de la superficie de Klein no orientable $N$ y $\pi^* : \mathscr{T}_k(N_g) \to \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1})$ el mapeo inducido en espacios de Teichmüller por $\pi : S \to N$. Entonces*

$$\pi^*\left(\mathscr{T}_k(N_g)\right) = \{[\mathfrak{X}] \in \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1}) \mid [\sigma^*\mathfrak{X}] = [\mathfrak{X}]\} =: \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1})^{\sigma^*}.$$

*Demostración.* Si $\mathfrak{Y}$ es una estructura dianalítica en $N$, entonces la estructura $\pi^*\mathfrak{Y}$ en $S$ es tal que la involución $\sigma : (S, \pi^*\mathfrak{Y}) \to (S, \pi^*\mathfrak{Y})$

es antianalítica, por lo que $\sigma^*(\pi^*\mathfrak{Y}) = \pi^*\mathfrak{Y}$. Esto implica que $\pi^*[\mathfrak{Y}] = [\pi^*\mathfrak{Y}] \in \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1})^{\sigma^*}$.

Procedemos a probar la contención contraria. Sea $[\mathfrak{X}] \in \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1})$ tal que $[\sigma^*\mathfrak{X}] = [\mathfrak{X}]$. Por definición, existe $f \in \mathit{Diff}_0(S_{g-1}; 2k)$ tal que $\sigma^*\mathfrak{X} = f^*\mathfrak{X}$, así tenemos que la siguiente composición es antianalítica

$$(S, \mathfrak{X}) \xrightarrow{\ \sigma\ } (S, f^*\mathfrak{X}) \xrightarrow{\ f\ } (S, \mathfrak{X}).$$

Sea $\tau := f \circ \sigma : S \to S$ y notemos que $\tau^2 \simeq id$. No es difícil ver que $\tau^2 = 1$. Como $\tau$ es antianalítica con respecto a la estructura $\mathfrak{X}$, el grupo $\langle\tau\rangle$ es un grupo de automorfismos de la superficie de Klein $(S, \mathfrak{X})$. Luego, por [1], Teorema 1.8.4, existe una única estructura dianalítica $\mathfrak{Y}'$ en la superficie $N' = S/\langle\tau\rangle$ tal que la proyección canónica $\pi' : (S, \mathfrak{X}) \to (N', \mathfrak{Y}')$ es dianalítica.

Por otro lado, fijemos una estructura $\mathfrak{Z} \in \mathcal{M}(N)$ (digamos la descrita en el Ejemplo 2.2) y consideremos el mapeo identidad $id : (S, \mathfrak{X}) \to (S, \pi^*\mathfrak{Z})$. Por [7], Corolario 7.2.3 (ver también [3], Teorema 11.8), existe un mapeo de Teichmüller $h : (S, \mathfrak{X}) \to (S, \pi^*\mathfrak{Z})$ tal que $h \simeq id$ y consideremos ahora la siguiente composición

$$(S, \pi^*\mathfrak{Z}) \xrightarrow{\ \sigma\ } (S, \pi^*\mathfrak{Z}) \xrightarrow{\ h\ } (S, \mathfrak{X}) \xrightarrow{\ \tau\ } (S, \mathfrak{X}).$$

Por la nota 2.9, la involución $\sigma$ es antianalítica con respecto a la estructura $\pi^*\mathfrak{Z}$. Si $K_{\tau\circ h\circ\sigma}$ y $K_h$ denotan las dilataciones de los mapeos $\tau\circ h\circ\sigma$ y $h$ respectivamente (ver [3], [7] y [14]), entonces $K_{\tau\circ h\circ\sigma} = K_h$ ya que $\tau$ y $\sigma$ son antianalíticas. Además, notemos que

$$\tau \circ h \circ \sigma \simeq \tau \circ \sigma \simeq f \circ \sigma^2 \simeq id \simeq h,$$

así por la unicidad de los Teoremas de Teichmüller (ver [3], Teorema 11.9 y [7], Corolario 7.2.3), se tiene que $\tau \circ h \circ \sigma = h$. Luego existe un homeomorfismo $\widehat{h} : N \cong S/\langle\sigma\rangle \to N' \cong S/\langle\tau\rangle$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & S \arrow[d, "\pi'"] \\ N \arrow[r, "\widehat{h}"] & N' \end{tikzcd}$$

Definamos la estructura dianalítica $\mathfrak{Y} := \widehat{h}^*\mathfrak{Y}' \in \mathcal{M}(N)$ y consideremos el diagrama conmutativo obtenido del anterior por adicionar las siguientes estructuras

$$\begin{array}{ccc} (S,\pi^*\mathfrak{Y}) & \xrightarrow{h} & (S,\mathfrak{X}) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ (N,\mathfrak{Y}) & \xrightarrow{\widehat{h}} & (N',\mathfrak{Y}') \end{array}$$

Como los mapeos $\pi$, $\pi'$ y $\widehat{h}$ son dianalíticos con respecto a las estructuras correspondientes, entonces por [1], Teorema 1.4.3 se tiene que $h : (S, \pi^*\mathfrak{Y}) \to (S, \mathfrak{X})$ es analítico. Pero $h \simeq id$, así por definición $\mathfrak{X}$ y $\pi^*\mathfrak{Y}$ son Teichmüller equivalentes y por lo tanto $[\mathfrak{X}] = [\pi^*\mathfrak{Y}] = \pi^*([\mathfrak{Y}])$. Esto completa la demostración del teorema. □

## 5. Teorema de Realización de Nielsen

Finalmente, en esta sección probamos el teorema de realización de Nielsen para el caso de superficies no orientables con puntos marcados. La idea principal, es usar la doble cubierta orientable $(S, \pi, \sigma)$ de una superficie de Klein $N$ y las inyecciones de las secciones anteriores:

$$\pi^* : \mathscr{T}_k(N_g) \to \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1}),$$

$$\phi : Mod(N_g; k) \to Mod(S_{g-1}; 2k).$$

Mostraremos primero que dichas funciones son compatibles con respecto a las acciones de los grupos modulares en los respectivos espacios de Teichmüller. Acto seguido, usamos los resultados de S. Kerckhoff y S. Wolpert para completar la demostración.

**Lema 5.1.** *Para toda* $[\mathfrak{X}] \in \mathscr{T}_k(N_g)$ *y* $\alpha \in Mod(N_g; k)$*, se cumple lo siguiente*

$$\pi^*(\alpha \cdot [\mathfrak{X}]) = \phi(\alpha) \cdot \pi^*([\mathfrak{X}]).$$

*Demostración.* Notemos que para todo $\alpha \in Mod(N_g; k)$, $[\mathfrak{X}] \in \mathscr{T}_k(N_g)$ y $f \in \mathit{Diff}(N_g; k)$ representante de la clase $\alpha$, se tiene que

$$\begin{aligned} \pi^*(\alpha \cdot [\mathfrak{X}]) =& \pi^*([f] \cdot [\mathfrak{X}]) = [\pi^*(f^*\mathfrak{X})] \\ \phi(\alpha) \cdot \pi^*([\mathfrak{X}]) =& [\rho(f)] \cdot [\pi^*\mathfrak{X}] = [\rho(f)^*(\pi^*\mathfrak{X})]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si probamos que para todo $f \in \mathit{Diff}(N_g; k)$ y $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(N)$ se cumple que

$$\rho(f)^*(\pi^*\mathfrak{X}) = \pi^*(f^*\mathfrak{X}),$$

entonces se sigue el resultado. Así pues, sean $f \in Diff(N_g; k)$ y $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(N)$. Por la definición de pullback, los mapeos $\pi : (S, \pi^*\mathfrak{X}) \to (N, \mathfrak{X})$ y $f : (N, f^*\mathfrak{X}) \to (N, \mathfrak{X})$ son dianalíticos y $\rho(f) : (S, (\rho(f))^*(\pi^*\mathfrak{X})) \to (S, \pi^*\mathfrak{X})$ es analítico. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(S, \rho(f)^*(\pi^*\mathfrak{X})) \arrow[r, "\rho(f)"] \arrow[d, "\pi"'] & (S, \pi^*\mathfrak{X}) \arrow[d, "\pi"] \\
(N, f^*\mathfrak{X}) \arrow[r, "f"] & (N, \mathfrak{X})
\end{tikzcd}$$

Como los mapeos $\pi \circ \rho(f)$ y $f$ son dianalíticos, por [1], Teorema 1.4.3 se tiene que $\pi : (S, \rho(f)^*(\pi^*\mathfrak{X})) \to (N, f^*\mathfrak{X})$ es dianalítica. Así, por la unicidad del pullback se concluye que

$$\pi^*(f^*\mathfrak{X}) = \rho(f)^*(\pi^*\mathfrak{X}),$$

como se quería demostrar. $\square$

A continuación probamos el resultado principal.

**Teorema 5.2.** *Todo subgrupo finito $G \subset Mod(N_g; k)$ actuando en $\mathscr{T}_k(N_g)$ fija algún punto de $\mathscr{T}_k(N_g)$.*

*Demostración.* Recordemos que la doble cubierta orientable $(S, \pi, \sigma)$ de la superficie $N$ induce un homomorfismo inyectivo (ver Teorema 3.2)

$$\phi : Mod(N_g; k) \to Mod(S_{g-1}; 2k) \qquad [f] \mapsto [\rho(f)].$$

Definimos $H$ como el subgrupo de $Mod^{\pm}(S_{g-1}; 2k)$ generado por $\phi(G)$ y $[\sigma]$. Notemos que este grupo es isomorfo a $G \times \mathbb{Z}_2$, ya que para todo $f : N_g \to N_g$ el correspondiente levantamiento $\widetilde{f} : S_{g-1} \to S_{g-1}$ conmuta con $\sigma$. Por el Teorema 1.3 existe un elemento $[\mathfrak{Y}] \in \mathscr{T}_{2k}(S_{g-1})$ que se mantiene fijo bajo la acción de todo elemento de $H$. Luego, para toda $\alpha \in G$ se satisface que

$$\phi(\alpha) \cdot [\mathfrak{Y}] = [\mathfrak{Y}] \tag{1}$$

y además

$$[\sigma^*\mathfrak{Y}] = [\sigma] \cdot [\mathfrak{Y}] = [\mathfrak{Y}].$$

Por el Teorema 4.3, se sigue que existe un elemento $[\mathfrak{X}] \in \mathscr{T}_k(N_g)$ tal que

$$[\mathfrak{Y}] = \pi^*([\mathfrak{X}]). \tag{2}$$

Afirmamos que dicho $[\mathfrak{X}]$ es un punto fijo para la acción del grupo $G$ en el espacio $\mathscr{T}_k(N_g)$. En efecto, si $\alpha \in G$, entonces por el lema anterior y las ecuaciones (1) y (2) tenemos que

$$\pi^*(\alpha \cdot [\mathfrak{X}]) = \phi(\alpha) \cdot \pi^*([\mathfrak{X}]) = \phi(\alpha) \cdot [\mathfrak{Y}] = [\mathfrak{Y}] = \pi^*([\mathfrak{X}]).$$

Finalmente, por el Lema 4.2 sabemos que $\pi^*$ es inyectivo y por lo tanto

$$\alpha \cdot [\mathfrak{X}] = [\mathfrak{X}].$$

$\square$

**Comentarios finales.** Consideremos una superficie compacta orientable de género $g$ y sea $p : \mathit{Diff}^+(S_g) \to Mod(S_g)$ la proyección natural. El problema de realización de Nielsen es un caso particular de la siguiente pregunta: ¿Para qué subgrupos $G \subset Mod(S_g)$ existe un homomorfismo $s : G \to \mathit{Diff}^+(S_g)$ tal que $p \circ s = id$, i.e. para que subgrupos $G$ la proyección $p$ admite una sección sobre $G$? Y similarmente en el caso no orientable para $p : \mathit{Diff}(N_g) \to Mod(N_g)$. Cuando la superficie es el toro $T^2$, es bien sabido que $Mod(T^2) = SL(2, \mathbb{Z})$ y en este caso es posible definir una sección directamente al tomar la acción de $SL(2, \mathbb{Z})$ en el espacio cociente $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. En el caso de una superficie no orientable, en [5] se muestra que $Mod(N_3) = GL(3, \mathbb{Z})$. Usando este hecho y el blow up en el toro visto como variedad algebraica real, se prueba además la existencia de una sección $s : Mod(N_3) \to \mathit{Diff}(N_3)$. Luego todo subgrupo de $Mod(T^2)$ o de $Mod(N_3)$ es realizable como un subgrupo de difeomorfismos de $T^2$ y $N_3$ respectivamente, sin importar si es finito. Así, es natural preguntarse para que valores de $g$ es posible construir secciones $s : Mod(S_g) \to \mathit{Diff}^+(S_g)$ y $s : Mod(N_g) \to \mathit{Diff}(N_g)$. En esta dirección, S. Morita en [11] y [12] demuestra que para $g \geq 5$ no existe una sección $s : Mod(S_g) \to \mathit{Diff}^+(S_g)$. La idea principal es la siguiente: si $e_i \in H^{2i}(Mod(S_g); \mathbb{Q})$ son las clases de Morita-Mumford-Miller y $p^* : H^*(Mod(S_g); \mathbb{Q}) \to H^*(\mathit{Diff}^+(S_g); \mathbb{Q})$ es el homomorfismo inducido en cohomología por la proyección natural $p : \mathit{Diff}^+(S_g) \to Mod(S_g)$, donde $\mathit{Diff}^+(S_g)$ es pensado con la topología discreta, entonces $p^*(e_i) = 0$ para $i \geq 3$. Usando este hecho y que $e_3 \neq 0$ en $H^6(Mod(S_g); \mathbb{Q})$ para $g \geq 5$, se sigue que no existe una sección.

Un problema interesante, sería tratar de responder dicha cuestión en el caso de las superficies no orientables. Para ello, traslademos la idea de S. Morita al caso no orientable. Consideremos el diagrama conmutativo obtenido por la doble cubierta orientable de $N_g$, donde todos los grupos tienen la topología discreta

$$\begin{tikzcd} \mathit{Diff}(N_g) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\rho"'] & Mod(N_g) \arrow[d, "\phi"] \\ \mathit{Diff}^+(S_{g-1}) \arrow[r, "p_2"] & Mod(S_{g-1}) \end{tikzcd}$$

el cual da lugar al siguiente diagrama conmutativo en cohomología

$$\begin{tikzcd} H^*(\mathit{Diff}(N_g);\mathbb{Q}) & H^*(Mod(N_g);\mathbb{Q}) \arrow[l, "p_1^*"'] \\ H^*(\mathit{Diff}^+(S_{g-1});\mathbb{Q}) \arrow[u, "\rho^*"] & H^*(Mod(S_{g-1});\mathbb{Q}). \arrow[l, "p_2^*"'] \arrow[u, "\phi^*"'] \end{tikzcd}$$

El resultado de Morita junto con el diagrama anterior prueban que $p_1^*(\phi^*(e_i)) = 0$ para $i \geq 3$. Así, para demostrar que no existe una sección $s : Mod(N_g) \to \mathit{Diff}(N_g)$ basta con determinar para qué valores de $i$ y $g$ se tiene que $\phi^*(e_i) \neq 0$ en $H^{2i}(Mod(N_g);\mathbb{Q})$.

Finalmente, los casos especiales que no fueron incluidos en nuestra discusión, i.e. aquellos que no satisfacen la condición $2 - g - k < 0$, son los grupos $Mod(\mathbb{R}P^2)$, $Mod(\mathbb{R}P^2;1)$, $Mod(\mathbb{R}P^2;2)$ y $Mod(K)$, donde $\mathbb{R}P^2$ es el plano proyectivo y $K$ es la botella de Klein. Sin embargo, todos estos grupos son finitos (ver [9]) y es bien sabido que satisfacen el teorema de realización de Nielsen.

**Agradecimientos**

Agradezco al Dr. Miguel A. Xicoténcatl por todo su apoyo y sus valiosos comentarios para la realización de este trabajo. Así mismo, agradezco el apoyo del CONACYT a través de la beca de doctorado No. 494867 y del proyecto de Ciencia Básica CB 2017-2018-A1-S-30345.

Nestor Colin Hernandez
*Departamento de Matemáticas*,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN,
Av. IPN 2508, Col. San Pedro Zacatenco
Ciudad de México, C.P. 07360.
México
ncolin@math.cinvestav.mx

# Referencias


[1] Alling N. L., Greenleaf N., *Fundations of the Theory of Klein Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, **219**, Springer-Verlag (1971).

[2] Braun C., *Moduli spaces of Klein surfaces and related operads,* Algebraic Geometric and Topology, **3** (2012), 1831-1899.

[3] Farb B., Margalit D., *A primer on mapping class groups,* Princeton University Press, Princeton, NJ, (2012).

[4] Gonçalves D. L., Guaschi J., Maldonado M., *Embeddings and the (virtual) cohomological dimension of the braid and mapping class groups of surfaces,* Confluentes Mathematici, **10** (2018), no. 1, 41-61.

[5] González-Acuña F. J., Márquez-Bobadilla J. M., *On the homeotopy group of the non orientable surface of genus three,* Revista Colombiana de Matemáticas, **40** (2006), 75-79.

[6] Hope G., Tillmann U., *On the Farrell Cohomology of the Mapping Class Group of Non-Orientable Surfaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, **137** (2009), 393-400.

[7] Hubbard J. H., *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics,* Vol. 1. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006.

[8] Kerckhoff S. P., *The Nielsen Realization Problem,* Annals of Mathematics, **117** (1983), 235-265.

[9] Korkmaz M., *Mapping Class Groups of Nonorientable Surfaces,* Geometricae Dedicata, **89** (2002), 107-131.

[10] Masur H., Wolf M., *The Weil-Petersson Isometry Group,* Geometriae Dedicata, **93** (2002), 177-190.

[11] Morita S., *Characteristic classes of surface bundles*, Inventiones Math., **90** (1987), 551-578.

[12] Morita S., *Geometry of Characteristic Classes*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 199, American Mathematical Society, 2001, Translated from the 1999 Japanese original, Iwanami Series in Modern Mathematics.

[13] Papadopoulos A., Penner R. C. *Hyperbolic metrics, measured foliations and pants decompositions for non-orientable surfaces,* Asian Journal of Mathematics, **20** (2016), no. 1, 157-182.

[14] Seppälä M., Sorvali T., *Geometry of Riemann Surfaces and Teichmüller Spaces,* North-Holland Publishing Co. (1992).

[15] Wolpert S. A., *Geodesic length functions and the Nielsen problem,* Journal of Differential Geometry, **25** (1987), no. 2, 275-296.

[16] Zieschang H., *Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces,* Lecture Notes in Mathematics, volumen 875, Springer-Verlag, (1981).