Morfismos, Vol. 20, No. 2, 2016, pp. 1–66

La ley de reciprocidad de Drinfeld

Julio César Galindo López [1]

Resumen

En este escrito presentamos la prueba de la correspondencia de Langlands para GL_2 sobre campos de funciones cuando la componente al infinito es especial dada por Drinfeld en [8].

Clasificación 2010 de acuerdo a la AMS: 11G09, 14G22.
Palabras y frases clave: Módulo de Drinfeld, variedad de Drinfeld, cohomología rígida, teoría de Eichler-Shimura, correspondencia de Langlands.

1. Introducción

El programa de Langlands es una serie de conjeturas dirigidas a entender los grupo de Galois de campos locales y de campos globales, así como sus extensiones finitas y completaciones. El estudio de los grupos de Galois es fundamental en la teoría de números debido a su gran contenido aritmético.

Uno de los mayores logros matemáticos de principios del siglo XX fue la *teoría de campos de clasess* la cual da una descripción explícita del *grupo de Galois abeliano de un campo local o global*. La teoría de campos de clases puede formularse como una biyección entre conjuntos de caracteres del grupo de Galois de un campo global por un lado, y el grupo de clases de ideles por otro lado. Esta es la *ley de reciprocidad* de T. Takagi y E. Artin establecida en el año 1920 como una generalización de la

[1]Este artículo corresponde a la tesis del autor, asesorada por el Dr. Timothy Mooney Gendron Thornton, realizada para optar al título de Maestro en Ciencias Matemáticas, otorgado el día 30 de marzo de 2016 por la Universidad Nacional Autónoma de México.

ley de reciprocidad cuadrática introducida por Euler y demostrada por Gauss. A finales de la década de los años 60, R. Langlands sugirió que el siguiente paso debe consistir en dar una descripción de ciertas representaciones del grupo de Galois absoluto en dimensiones más altas que uno (es decir, una teoría de campos de clase *no abeliana*). La conjetura (*la correspondencia de Langlands*) propone relacionar representaciones de Galois de rango arbitrario con representaciones automorfas cuspidales de algún grupo de los adeles. Estas hipotéticas leyes de reciprocidad implican conjeturas como la conjetura de Artin sobre holomorfía de ciertas funciones-L o la conjetura de Ramanujan-Petersson sobre eigenvalores de Hecke de formas cuspidales.

En el caso de campos de números, podemos mencionar aplicaciones como la prueba del último teorema de Fermat dada por A. Wiles. Sin embargo, la prueba de la correspondencia de Langlands en cualquier generalidad parece estar lejos de alcanzarse.

La primer importante contribución hacia la solución de la correspondencia de Langlands en el caso de campos de funciones fue dada en el año 1974 por el matemático Vladimir Drinfeld. Drinfeld descubrió de una nueva clase de espacios modulares asociados a objetos algebraicos conocidos ahora como *módulos de Drinfeld* o, como en el artículo original de Drinfeld [8], *módulos elípticos*. De alguna manera, podemos pensar que los módulos de Drinfeld son los análogos en característica positiva de las curvas elíptica en característica cero. En particular, los módulos de Drinfeld cuentan con la misma teoría aritmética que las curvas elípticas con la ventaja de ser objetos algebraicos más concretos.

El espacio modular asociado a los módulos de Drinfeld juega un papel crucial para la correspondencia de Langlands para el grupo GL_n sobre campos globales de característica positiva. En particular, en analogía con la teoría de Eichler-Shimura para curvas elípticas, Drinfeld logra descomponer la cohomología de los espacios modulares de rango dos (convenientemente compactificadas) por la acción de operadores de Hecke y una acción de Galois que permite asociar módulos de Galois a formas automorfas. En trabajos posteriores, con la noción de Shtuka, se logra demostrar la correspondencia en su generalidad gracias a los trabajos de Drinfeld [10], L. Lafforgue [26] y V. Lafforgue [27].

Los resultados de Drinfeld se vieron fuertemente influenciado por numerosos descubrimientos matemáticos de la época y, a su vez, han tenido un enorme impacto en el desarrollo de la aritmética de campos de funciones en las pasadas cuatro décadas. Por este motivo, el presente texto pretende ser una guía para entender los resultados del artículo de

Drinfeld [8].
Notación. Usaremos la siguiente notación (ver [17] o [31]):

- $\mathbb{F}_q$ es el campo finito de $q = p^m$ elementos con caracerística p.
- $\mathfrak{X}$ es una curva suave proyectiva y absolutamente irreducible sobre $\mathbb{F}_q$. Denotaremos por $|\mathfrak{X}|$ al conjunto de los puntos cerrados de $\mathfrak{X}$.
- ∞ es un punto cerrado fijo de $\mathfrak{X}$.
- K es el campo de funciones $\mathbb{F}_q(\mathfrak{X})$ de $\mathfrak{X}$ sobre $\mathbb{F}_q$.
- A es el anillo $\Gamma(\mathfrak{X} - \infty, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ de funciones regulares fuera de ∞.
- v_∞ es la valuación asociada al lugar ∞ y K_∞ es la completación de K correspondiente.
- $\mathbb{C}_\infty$ es la completación de una cerradura algebraica de K_∞.
- Para $x \in |\mathfrak{X}|$, denotemos por $\mathcal{O}_x$ al anillo de valuación de K_x y por $\kappa(x) = \mathcal{O}_x/\pi_x$ en donde $x(\pi_x) = 1$.
- $d_\infty = \mathrm{gr}(\infty)$ denota el grado del campo residual $\kappa(\infty)$ sobre $\mathbb{F}_q$.
- Denotamos al grado de un elemento en K_∞ como
$$\mathrm{gr}(\bullet) = -d_\infty v_\infty(\bullet).$$
- Si $a \in A - \{0\}$, entonces $\mathrm{gr}(a) = \log_q(\#A/(a))$.
- $|\bullet|_\infty$ es el valor absoluto asociado al lugar ∞ de manera que tenemos $|\bullet|_\infty = q^{\mathrm{gr}(\bullet)}$.

Como ejemplo estándar, tomemos $\mathfrak{X} = \mathbf{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ y $\mathfrak{X} - \infty = \mathbf{A}^1$, se tiene $d_\infty = 1$, $A = \mathbb{F}_q[T]$, $K = \mathbb{F}_q(T)$ es el campo de funciones racionales y $K_\infty = \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ es el campo de series de Laurent en T^{-1}.

2. Módulos de Drinfeld

En esta sección, se introducen los módulos de Drinfeld. Con ayuda de estos objetos, cuya naturaleza es lineal, se logran resolver problemas de moduli con estructuras de nivel prescritas. Los objetos que resultan de tal construcción (variedades modulares de Drinfeld) constituyen el objeto principal de este escrito.

La totalidad de los resultados que aquí se exponen, provienen del artículo original de Drinfeld [8]. Las referencias que contienen mayor detalle sobre la teoría de módulos de Drinfeld, y que seguiremos en nuestra exposición, son [17], [7], [28] y [13].

2.1. Módulos de Drinfeld

Sea B un anillo conmutativo con unidad de característica positiva $p > 0$ (es decir, se tiene un homomorfismo canónico $\mathbb{F}_q \to B$). El *grupo aditivo sobre* B, denotado por $\mathbb{G}_{a,B}$, corresponde al funtor que asocia, a cada B-álgebra R, el grupo aditivo R. Este funtor, está representado por el esquema afín $\mathrm{Spec}(B[T])$. En efecto,

$$\mathrm{Hom}(B[T], R) = R,$$

para cualquier B-álgebra R. Así, el grupo aditivo $\mathbb{G}_{a,B}$, puede identificarse con el esquema afín $\mathrm{Spec}(B[T])$ junto con la ley de grupo $\mathbb{G}_{a,B} \times \mathbb{G}_{a,B} \to \mathbb{G}_{a,B}$ que está inducida por el homomorfismo sobre B,

$$\begin{aligned} B[T] &\to B[T] \otimes_B B[T] \\ T &\mapsto T \otimes 1 + 1 \otimes T. \end{aligned}$$

Las afirmaciones que se dan a continuación pueden consultarse en [17, Capítulo 1]. El endomorfismo $b : B[T] \to B[T]$ induce un morfismo de esquemas en grupos $f : \mathbb{G}_{a,B} \to \mathbb{G}_{a,B}$. El morfismo f resulta ser un endomorfismo de esquemas en grupos (con respecto a la ley de grupo) si y sólo si se satisface la siguiente igualdad en $B[T]$,

$$b(T \otimes 1 + 1 \otimes T) = b(T \otimes 1) + b(1 \otimes T).$$

Esta última igualdad, equivale a decir que $b(T)$ es un polinomio aditivo; esto es, si existen elementos $b_i \in B$ tales que $b(T) = \sum_{i \geq 0} b_i T^{p^i}$. Denotemos al *endomorfismo de Frobenius de* $B[T]$ por $\tau : T \to T^p$.

Denotemos por $B\{\tau\}$ al anillo (no conmutativo) de polinomios en la indeterminada τ con la ley de conmutación $\tau b = b^p \tau$, para $b \in B$. Entonces, $B\{\tau\}$ es canónicamente isomorfo al anillo de endomorfismos $\mathrm{End}(\mathbb{G}_{a,B})$ (ver [3, Capítulo 2]).

Definimos el homomorfismo *derivación* como

$$\begin{aligned} D : \mathrm{End}(\mathbb{G}_{a,B}) &\to B \\ \sum_{i=0}^{n} b_i \tau^i &\mapsto b_0. \end{aligned}$$

En lo sucesivo, k será un campo de característica $p > 0$.

Definición 2.1 (**Módulo de Drinfeld sobre un campo** [8, §2]). Sea k un campo junto con un homomorfismo $\gamma : A \to k$. Un homomorfismo de anillos,

$$\phi : A \to k\{\tau\} = \mathrm{End}(\mathbb{G}_{a,k}),$$

es un A-módulo de Drinfeld sobre k, si satisface las siguientes condiciones:

1. $\phi(A) \nsubseteq k$.
2. El siguiente triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & k\{\tau\} \arrow[d, "D"] \\ & k \end{tikzcd}$$

   conmuta. Esto es, $D \circ \phi = \gamma$.

Denotaremos por $\mathrm{Drin}_A(k)$ al conjunto de A-módulos de Drinfeld sobre k.

A menudo, si $\phi \in \mathrm{Drin}_A(k)$, escribiremos por ϕ_a a la imagen de ϕ en lugar de $\phi(a)$. En la Definición 2.1, la condición de que la imagen de A no esté contenida en k, es una condición de *no degeneración*. La condición de normalización, $D \circ \phi = \gamma$, es análoga a la normalización usada en multiplicación compleja para curvas elípticas.

Como se hizo notar anteriormente, $k\{\tau\}$ puede identificarse con el anillo $\mathrm{End}(\mathbb{G}_{a,k})$. Entonces, para cada $\phi \in \mathrm{Drin}_A(k)$, podemos definir un funtor de la categoría de k-álgebras conmutativas a la categoría de A-módulos como

$$\begin{aligned} E_\phi : \mathrm{Alg}_k &\to \mathrm{Mod}_A \\ R &\mapsto E_\phi(R), \end{aligned}$$

en donde $E_\phi(R)$ es el A-módulo dado por considerar $(R, +)$ como grupo abeliano con la siguiente acción de A:

$$ar := \phi_a(r),$$

para cualquier $a \in A$ y $r \in R$.

Definición 2.2. Sean ϕ y ϕ' elementos de $\mathrm{Drin}_A(k)$. Un morfismo de ϕ a ϕ' sobre k, es un polinomio $P \in k\{\tau\}$ tal que $P\phi_a = \phi'_a P$, para todo $a \in A$. Los morfismos de ϕ a ϕ' no cero se llaman *isogenias*.

Equivalentemente, un morfismo $P : \phi \to \phi'$ de módulos de Drinfeld, se traduce en un homomorfismo funtorial de A-módulos que consiste en evaluar el polinomio P:

$$\begin{aligned} P : E_\phi(R) &\to E_{\phi'}(R) \\ r &\mapsto P(r). \end{aligned}$$

Nótese que el producto de dos isogenias resulta ser una isogenia. De esta forma, $\mathrm{Drin}_A(k)$ forma una categoría cuyos morfismos son isogenias. En particular, los isomorfismos en $\mathrm{Drin}_A(k)$ son los polinomios invertibles en $k\{\tau\}$ que son, precisamente, los polinomios constantes no cero k^*. Por lo tanto, dos elementos ϕ y ϕ' en $\mathrm{Drin}_A(k)$ son isomorfos si y sólo si existe una constante $u \in k^*$ tal que $u\phi_a = \phi'_a u$ para toda $a \in A$.

Proposición 2.3. *Cualquier módulo de Drinfeld, $\phi \in \mathrm{Drin}_A(k)$, es inyectivo.*

Demostración. Ya que $k\{\tau\}$ no tiene divisores de cero, entonces $\ker \phi$ es un ideal primo de A. Supongamos que $\ker \phi \neq 0$. Debido a que A es un dominio de Dedekind ([17, Capítulo 4]) se tiene que $\ker \phi$ es un ideal maximal de A. Esto último implica que la imagen de ϕ es un campo contenido en k, ya que todos los elementos invertibles en $k\{\tau\}$ están en k. Obtenemos así una contradicción a la definición de módulo de Drinfeld. □

Disponemos de una aplicación *grado* definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{gr} : k\{\tau\} &\to \mathbb{Z} \\ \sum_{i=0}^{n} a_i \tau^i &\mapsto p^n \end{aligned}$$

siempre que $a_n \neq 0$ y $\mathrm{gr}\, 0 = 0$. Observe que se satisface $\mathrm{gr}(\varphi + \psi) \leq \mathrm{máx}\{\mathrm{gr}(\varphi), \mathrm{gr}(\psi)\}$.

Proposición 2.4. *Sea $\phi \in \mathrm{Drin}_A(k)$. Entonces, existe un único número real $d > 0$ tal que $\mathrm{gr}\, \phi_a = d\, \mathrm{gr}(a)$ para toda $a \in A$.*

Demostración. Si definimos $\mu(a) = \operatorname{gr} \phi_a$, entonces se tiene una aplicación $\mu : A \to \mathbb{Z}$ tal que $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$ y $\mu(a+b) \leq \text{máx}\{\mu(a), \mu(b)\}$. Ya que $\mu(a) \geq 1$ para $a \neq 0$ y $\mu(a) > 1$ para alguna $a \in A$, la relación $\mu(a/b) = \mu(a)/\mu(b)$ para $a/b \in K$, define una extensión de $\mu(a)$ a K como un valor absoluto. Por lo tanto, existe un número real $d > 0$ tal que $\operatorname{gr} \phi_a = d \operatorname{gr}(a)$, en donde $\operatorname{gr}(a)$ está normalizado por $\#(A/(a)) = q^{\operatorname{gr}(a)}$. $\square$

El número real, d, que aparece en la Proposición 2.4, se llama *el rango del A-módulo de Drinfeld ϕ*. De hecho, es posible probar (ver demostración de la Proposición 2.10) que el rango de un módulo de Drinfeld es un número entero.

Nota 2.5. Módulos de Drinfeld isomorfos tienen necesariamente el mismo rango ([8, §2]).

Seguiremos denotando por $\operatorname{Drin}_A(k)$ a la categoría de A-módulos de Drinfeld de rango $d > 0$ sobre k.

Ejemplo 2.6. Tomemos $A = \mathbb{F}_q[T]$ y sea k un campo junto con una estructura de A-módulo dada por $\gamma : A \to k$. Un módulo de Drinfeld de rango d sobre k está determinado por

$$\phi_T = \gamma(T) + c_1\tau + \cdots + c_d\tau^d,$$

con $c_1, \ldots, c_d \in k$ y $c_d \neq 0$. Por otro lado, cualquier elección de $c_1, \ldots, c_d$ con $c_d \in k^\times$ define un módulo de Drinfeld de rango d. Si ϕ y ϕ' son elementos isomorfos en $\operatorname{Drin}_{\mathbb{F}_q[T]}(k)$, entonces existe un elemento $u \in k^*$ tal que $\phi' = u^{-1}\phi u$, o equivalentemente $\phi'_T = u^{-1}\phi_T u$. De este modo

$$\phi'_T = \gamma(T) + u^{q-1}c_1\tau + u^{q^2-1}c_2\tau + \cdots + u^{q^d-1}c_d\tau^d.$$

Si k es algebraicamente cerrado, el conjunto de clases de isomorfismo de módulos de Drinfeld de rango d es isomorfo a k^{d-1}. Para $d = 1$ existe solamente una clase de isomorfismo de $\mathbb{F}_q[T]$-módulos de Drinfeld. La elección estándar, llamado el *módulo de Carlitz*, es el módulo de Drinfeld de rango 1 dado por

$$\phi_T = \gamma(T) + \tau.$$

Para $d = 2$ la clase de isomorfismo del módulo de Drinfeld $\phi_T = \gamma(T) + c_1\tau + c_2\tau^2$ está determinada por su j-invariante

$$j(\phi) = \frac{c_1^{q+1}}{c_2}.$$

El estudio del anillo A, cuando no es el anillo de polinomios $\mathbb{F}_q[T]$, puede llegar a ser complicado (véase [38] y [19]). Por lo tanto, para tener un mejor acercamiento a la teoría, es necesario definir módulos de Drinfeld sobre esquemas arbitrarios definidos sobre A.

Sea S un esquema sobre $\mathbb{F}_q$. Vamos a entender por un *haz en líneas* G a un esquema en grupo conmutativo sobre S que es localmente, para la topología de Zariski, isomorfo al esquema en grupo $\mathbb{G}_{a,S} := \mathbb{G}_a \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} S$. Vamos a denotar por $\operatorname{End}_S(G)$ a los endomorfismos, como esquemas en grupo, de G sobre S. Por ejemplo, si tenemos una cubierta abierta afín $\{\operatorname{Spec}(B_i)\}$ de S tal que G es isomorfo, sobre cada abierto afín, a $\mathbb{G}_{a,B_i}$ (es decir, una trivialización de G), entonces la restricción de $\operatorname{End}_S(G)$ a B_i es simplemente $B_i\{\tau\}$.

Definición 2.7 (**Módulo de Drinfeld sobre un esquema** [8, §5])**.** Sea S un $\mathbb{F}_q$-esquema sobre A. Sea $d > 0$ un número entero. Un módulo de Drinfeld de rango d sobre S está dado por una pareja (G, ϕ) en donde G es un haz en líneas sobre S y $\phi : A \to \operatorname{End}_S(G)$ es un homomorfismo de anillos tal que, sobre cualquier subesquema abierto afín trivializador $\operatorname{Spec}(B)$ de S, la imagen del homomorfismo ϕ está dado por la expresión

$$\phi_a = \sum_{i=0}^{n} b_i(a)\tau^i \in B\{\tau\},$$

en donde los elementos $b_{m+1}(a), \ldots, b_n(a)$ son nilpotentes en B con $m = d\,\operatorname{gr}(a)$ y $b_m(a)$ es invertible en B.

Denotaremos por $\operatorname{Drin}_A(S)$ al conjunto de A-módulos de Drinfeld de rango d sobre S.

Sean (G', ϕ') y (G, ϕ) elementos de $\operatorname{Drin}_A(S)$. Un morfismo entre los A-módulos de Drinfeld $\psi : (G', \phi') \to (G, \phi)$, es un morfismo de S-esquemas en grupo $\psi : G' \to G$ tal que $\psi \circ \phi'_a = \phi_a \circ \psi$ para cada $a \in A$. Además ψ es un isomorfismo si $\psi : G' \to G$ lo es. Una *isogenia* entre módulos de Drinfeld es un morfismo finito (o, equivalentemente, un morfismo no cero). Una isogenia existe solo entre módulos de Drinfeld del mismo rango (ver [8, §5]). De esta manera $\operatorname{Drin}_A(S)$ es una categoría cuyos morfismos son isogenias.

Sea $S' \to S$ un morfismo de esquemas. Un módulo de Drinfeld $(G, \phi) \in \operatorname{Drin}_A(S)$ da lugar a un módulo de Drinfeld $(G \times_S S', \phi') \in \operatorname{Drin}_A(S')$ del mismo rango ($G \times_S S'$ hereda la estructura de un esquema en grupo sobre S') en donde ϕ' se induce a partir de ϕ. En particular, si tomamos $S' = \mathrm{Spec}(k_s)$ donde $s \in S$ y k_s es el campo residual asociado, (G, ϕ) induce por *pull-back* un A-módulo de Drinfeld sobre los campos residuales en cada punto $s \in S$. En este sentido (G, ϕ) puede pensarse como una *familia continua* de A-módulos de Drinfeld sobre los campos residuales de S.

Nota 2.8. Notemos que en la Definición 2.7, cuando restringimos a un abierto trivializador $\mathrm{Spec}(B)$, podemos tener elementos invertibles en $B\{\tau\}$ además de las constantes que no son cero. Por tal razón se tiene la presencia de nilpotentes. Sin embargo, es posible desaparecer tal presencia bajo conjugación por un automorfismo de $\mathbb{G}_{a,B}$ (ver [8, Proposición 5.2]) de tal forma que todo módulo de Drinfeld $(G, \phi) \in \mathrm{Drin}_A(S)$ es isomorfo a un módulo de Drinfeld del mismo rango junto con la condición $b_i(a) = 0$ para $i > m$. Usando la equivalencia de categorías entre haces en líneas G sobre S y gavillas invertibles (localmente libres de rango 1) $\mathscr{L}$ de $\mathscr{O}_S$-módulos sobre S ([18, 9.4]), las propiedades que definen a ϕ pueden simplificarse a

$$\phi_a = \sum_{i=0}^{m} \beta_i(a)\tau^i,$$

con $\tau^i : \mathscr{L} \to \mathscr{L}^{\otimes q^i}$ y $\beta_i(a) \in \Gamma(S, G^{\otimes(1-q^i)})$ ($\beta_i(a)$ es localmente invertible) para cada $i \geq 0$ de manera que el producto $\beta_i(a)\tau^i$ define un endomorfismo de $\mathscr{L}$. A este módulo de Drinfeld se le conoce como *A-módulo de Drinfeld estándar sobre S*. Ahora bien, cada A-módulo de Drinfeld da lugar a un módulo de Drinfeld estándar si se olvida la estructura $\mathscr{O}_S$-lineal sobre G ([28, §1.2]). De esta manera A-módulos de Drinfeld estándar son isomorfos a A-módulos de Drinfeld en el sentido de la Definición 2.7. La definición de módulo de Drinfeld estándar se adapta de mejor manera para mostrar existencia de problemas de moduli (véase 2.15).

Ejemplo 2.9. Si $S = \mathrm{Spec}(B)$ es afín, en donde a B se le dota de una estructura de A-álgebra por medio de $\gamma : A \to B$, y si G es el haz en líneas trivial sobre S, entonces el módulo de Drinfeld (G, ϕ) está dado por un homomorfismo de anillos $\phi : A \to B\{\tau\}$ tal que para $a \in A - \{0\}$,

$$\phi_a = \sum_{i=0}^{d\,\mathrm{gr}(a)} b_i \tau^i,$$

donde $b_i \in B$, $b_{d\,\mathrm{gr}(a)}$ es invertible y $b_0 = \gamma(a)$. Para $S = \mathrm{Spec}(k)$, tenemos que $\phi \in \mathrm{Drin}_A(k)$ y se recupera la Definición 2.1.

2.2. Variedades modulares de Drinfeld

En lo que sigue, es necesario parametrizar a los módulos de Drinfeld sobre un esquema por medio de una variedad modular. Para esto, Drinfeld consideró *problemas de moduli.* Como primera aproximación para definir una superficie modular, consideremos al funtor contravariante dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^d : \operatorname{Sch}/A &\to \operatorname{Set} \\ S &\mapsto \mathcal{M}^d(S) := \left\{ \begin{array}{c} \text{clases de isomorfismo de } A\text{-módulos} \\ \text{de Drinfeld de rango } d \text{ sobre } S \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Queremos encontrar algún esquema M sobre A cuyo conjunto de S-puntos (esto es, morfismos $S \to M$ de esquemas sobre A) corresponda biyectiva y funtorialmente a $\mathcal{M}^d$. Más generalmente, sea M un esquema sobre A y definamos el funtor contravariante

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_M : \operatorname{Sch}/A &\to \operatorname{Set} \\ S &\mapsto \mathcal{F}_M(S) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sch}/A}(S, M). \end{aligned}$$

Por el lema de Yoneda, $\mathcal{F}_M$ determina a M ya que $M \mapsto \mathcal{F}_M$ es un encaje fiel y pleno de Sch/A en la categoría $\operatorname{Hom}(\operatorname{Sch}/A, \operatorname{Set})$ de funtores contravariantes.

Supongamos que $\mathcal{M}^d$ es representable por el A-esquema M. Entonces, al morfismo identidad en $\operatorname{Hom}(M, M)$ le corresponde un módulo de Drinfeld $\Phi = (\tilde{G}, \Phi) \in \operatorname{Drin}_A(M)$, de tal forma que cualquier módulo de Drinfeld $(G, \phi) \in \operatorname{Drin}_A(S)$ es el pullback de Φ a través de un único morfismo de $S \to M$ (Φ es el módulo de Drinfeld clasificante). Esto implica que los objetos clasificados por $\mathcal{M}^d$ no tienen automorfismos no triviales. Sin embargo, el grupo multiplicativo $\mathbb{F}_q^*$ está contenido en $\operatorname{Aut}(\Phi)$ para cualquier módulo de Drinfeld Φ debido a que cada elemento invertible de A define un automorfismo de (G, ϕ) ([8, Proposición 5.2]). Por lo tanto, no podemos esperar que $\mathcal{M}^d$ sea representable.

Para lograr superar este obstáculo y obtener un *problema de moduli representable*, necesitamos imponer *estructuras de nivel con respecto a ideales de A* que trivializan el grupo de automorfismos de los objetos resultantes. En particular, un A-módulo de Drinfeld con una estructura de nivel *adecuada*, tendrá como único automorfismo a la identidad.

Mencionamos que la noción de estructuras de nivel ha sido extendida e intensamente discutida por Katz y Mazur en el caso de curvas elípticas [25].

Sea I un ideal *no cero* de A y sea $V(I)$ el subesquema cerrado de $\mathrm{Spec}(A)$ definido por I (como conjunto, $V(I)$ consiste de aquellos ideales primos de A que contienen a I). Consideremos un módulo de Drinfeld $(G, \phi) \in \mathrm{Drin}_A(S)$. Formemos al *$S$-esquema en grupo de I-puntos de torsión*

$$G[I] = \bigcap_{a \in I} \ker\left[\phi_a : G \to G\right],$$

en donde la intersección es la intersección (es decir, producto fibrado) de subesquemas.

El esquema en grupo $G[I]$ tiene una estructura natural de esquema de A/I-módulos inducida por ϕ ([28, §1]).

Proposición 2.10. *Sea $(G, \phi) \in \mathrm{Drin}_A(S)$ un módulo de Drinfeld, y sea I un ideal no cero de A.*

1. *Existe un ideal $J \subset A$, tal que IJ es principal e $I + J = A$.*
2. *Sea J un ideal tal que $I + J = A$. Entonces, existe un isomorfismo canónico*
$$G[IJ] \cong G[I] \times_S G[J].$$
3. *Sea T un esquema sobre S. Entonces*
$$G[I] \times_S T \cong (G \times_S T)[I].$$

Demostración. Ya que A es dominio de Dedekind,

$$I = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{s_i}, \qquad s_i > 0.$$

Escójase $a \in A$ con $v_{\mathfrak{p}_i}(a) = s_i$ para $i \leq r$. Sea $J \subset A$ el ideal tal que $IJ = (a)$. Por el teorema chino del residuo,

$$A/IJ \cong A/I \times A/J.$$

Ahora, nótese que $G[I]$ es el esquema que representa al funtor sobre S-esquemas

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_A(A/I, G(T)).$$

Por lo tanto, se concluye que

$$G[IJ](T) \cong G[I](T) \times G[J](T).$$

Con estas observaciones se sigue el resultado. $\square$

Intuitivamente, una I-estructura de nivel sobre G debe ser una elección de un isomorfismo entre $(A/I)^d$ y $G[I]$. Como afirma la Proposición 2.11, esto sucede si estamos en el caso fuera del soporte de I (es decir, en donde existe étalidad) pero falla si I es divisible por una característica residual de S.

Proposición 2.11. *El esquema en grupo $G[I]$ es finito y plano de rango la cardinalidad de $(A/I)^d$ sobre S. Es étale (es decir, reducido) fuera del soporte (la imagen inversa en $S \to \operatorname{Spec}(A)$ de los primos que dividen a I) de I. Localmente, para la topología étale, se tiene el isomorfismo de A/I-módulos sobre S*

$$\alpha : (I^{-1}/A)^d_S \xrightarrow{\simeq} G[I],$$

en donde $(I^{-1}/A)^d_S$ es el esquema constante de A/I-módulos sobre S.

Demostración. Supongamos que se tiene J un ideal de A como en la Proposición 2.10. Si $Z \subset \mathfrak{X}$ es cualquier subesquema finito cerrado, entonces podemos escoger J tal que $Z \cap V(J) = \emptyset$. Por lo tanto, es suficiente probar el resultado cuando I es principal. Por la Proposición 2.4, existe un número real $d > 0$ tal que $\operatorname{gr}(\phi_a) = (\#(A/(a)))^d$. De hecho, por la Proposición 2.3 en [8], se tiene que

$$\operatorname{gr}(\phi_a) = \#G[a]$$

sobre $S - \theta^{-1}(V(A/a))$, en donde $\theta : S \to \operatorname{Spec}(A)$. Por lo tanto, $G[a]$ es finito y étale de rango constante $\operatorname{gr}(\phi_a)$. Además,

$$\#G[a^2] = \operatorname{gr}(\phi_{a^2}) = \operatorname{gr}(\phi_a)^2 = \#G[a]^2,$$

sobre $S - \theta^{-1}(V(A/a))$. Esto último implica que $G[a^2]$ es finito y étale de rango constante

$$(\#(A/(a^2)))^d = ((\#(A/(a)))^d)^2.$$

Sea $x \in |\mathfrak{X}|$ y π_x un uniformizador para $\mathcal{O}_x$. Ya que A es dominio de Dedekind, es posible descomponer $\mathcal{O}_x \otimes_A G[\pi_x^m]$, para alguna m no negativa, como un a suma directa de módulos isomorfos a $\mathcal{O}_x/(\pi_x^i)$ con $0 < i \leq 2m$. Además,

$$(\mathcal{O}_x/\pi_x^i)_{\pi_x^m} = \begin{cases} \mathcal{O}_x/(\pi_x^i) & 0 < i \leq m \\ (\pi_x^{i-m})/(\pi_x^i) & m < i \leq 2m. \end{cases}$$

Ya que $\#G[\pi^{2m}] = \#G[\pi^m]$, se tiene que $i = 2m$ y, por lo tanto, $G[a^2]$ es $(A/(a^2))$-módulo libre. Así, $G[a]$ es $(A/(a))$-módulo libre de rango constante $(\#(A/(a)))^d$. Ya que las componentes primarias de $G[a]$ son de la forma $G[\pi^m]$, entonces $G[a]$ es $A/(a)$-módulo libre de rango d. Finalmente, por la Proposición 2.10, $G[a] = G[I] \times G[J]$. De esta manera, $G[I]$ es libre de rango d sobre A/I. Nuevamente por la Proposición 2.10, existe una proyección canónica $G[a] \to G[I]$. Por lo tanto, como $S = \mathrm{Spec}(B)$-módulo, $\mathscr{O}_{G[I]}$ es un sumando directo de $\mathscr{O}_{G[a]}$; es decir, $\mathscr{O}_{G[I]}$ es localmente libre de rango d. □

Nota 2.12. En el transcurso de la prueba de la Proposición 2.4, se ha visto que el rango de un módulo de Drinfeld es un entero positivo.

Se sigue de la Proposición 2.10 que los I-puntos de división de un módulo de Drinfeld (G, ϕ) forman un subesquema cerrado que es plano sobre S y cuya gavilla de ideales en $\mathscr{O}_G$ es invertible, es decir, es un divisor de Cartier efectivo de G.

Definición 2.13 ([8, §5])**.** Sea $(G, \phi) \in \mathrm{Drin}_A(S)$ un módulo de Drinfeld. Una I-estructura de nivel para (G, ϕ) es un morfismo de A-módulos

$$\alpha : (I^{-1}/A)^d \to G(S),$$

tal que existe una igualdad de divisores de Cartier efectivos en G,

$$\sum_{j \in (I^{-1}/A)^d} [\alpha(j)] = [G[I]].$$

Ejemplo 2.14 ([28, Teorema 1.4.1])**.** Supongamos que $A = \mathbb{F}_q[T]$. Sea $\gamma : A \to k$ un homomorfismo de anillos donde k es un campo algebraicamente cerrado. Consideremos un módulo de Drinfeld $\phi \in \mathrm{Drin}_{\mathbb{F}_q[T]}(\mathrm{Spec}(k))$ con $\phi_T = \sum_{i=1}^{d} c_i \tau^i$. Sea $I = (f)$ un ideal no cero de $\mathbb{F}_q[T]$. Si $\phi_{(f)} = \sum_{r=0}^{d\,\mathrm{gr}(f)} b_r \tau^r$, denotamos por $\phi_f(Z)$ al polinomio $\sum_{r=0}^{d\,\mathrm{gr}(f)} b_r Z^{q^r} \in k[Z^q]$. Una I-estructura de nivel sobre el módulo de Drinfeld ϕ es un homomorfismo de A-módulos $\alpha : (f^{-1}A/A)^d \to k$ tal que el polinomio $\phi_f(Z)$ es igual a $b \prod_{j \in (f^{-1}A/A)^d} (Z - \alpha(j))$ para algún elemento $b \in k$.

Si $(G, \phi) \in \mathrm{Drin}_A(S)$ es un módulo de Drinfeld, la tripleta (G, ϕ, α) denotará a un A-módulo de Drinfeld de rango d sobre S con una I-estructura de nivel α. Denotaremos por $\mathrm{Drin}_{A,I}(S)$ al conjunto de tales tripletas.

Sean (G, ϕ, α) y (G', ϕ', β) elementos de $\mathrm{Drin}_{A,I}(S)$. Un morfismo entre (G, ϕ, α) y (G', ϕ', β) es un morfismo $\xi : (G, \phi) \to (G', \phi')$ tal que

$$\xi(S) \circ \alpha = \beta,$$

en donde $\xi(S) : G(S) \to G'(S)$ se induce a través de ξ. Un morfismo es un isomorfismo si ξ es un isomorfismo de módulos de Drinfeld.

Sea I un ideal no cero de A. Denotemos por $\mathcal{M}_I^d$ al funtor contravariante

$$\mathcal{M}_I^d : \mathrm{Sch}/A \to \mathrm{Set}$$
$$S \mapsto \mathcal{M}_I^d(S) = \left\{ \begin{array}{c} \text{clases de isomorfismo} \\ \text{de } A\text{-módulos de Drinfeld} \\ \text{de rango } d \text{ sobre } S \\ \text{con } I\text{-estructura de nivel} \\ \alpha : (I^{-1}/A)^d \to G(S) \end{array} \right\}.$$

Teorema 2.15 (**Drinfeld** [8, §5])**.** *Sea I un ideal no cero de A tal que $V(I)$ contiene más de un elemento. Entonces, el funtor $\mathcal{M}_I^d$ es representable por un esquema afín, M_I^d, de tipo finito sobre A.*

Demostración. A continuación daremos un esbozo sobre la construcción del esquema M_I^d en el caso cuando la imagen de $S \to \mathrm{Spec}(A)$ está contenida en $\mathrm{Spec}(A) - V(I)$ siguiendo la referencia [28]. En primer lugar, el anillo A tiene una presentación

$$A = \mathbb{F}_q[a_1, \ldots, a_t]/(f_1, \ldots, f_m)$$

tal que el ideal I es generado por $a_1, \ldots, a_s$ para $s \leq t$. Supongamos que $(G, \phi, \alpha) \in \mathrm{Drin}_{A,I}(S)$ es un módulo de Drinfeld *estándar* (véase la Nota 2.8) con $\alpha : (I^{-1}/A)^d_S \xrightarrow{\simeq} G[I]$. Especificamos un generador $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in (I^{-1}/A)^d$. Usando α, podemos usar $\alpha(e_1)$ como una sección que trivializa al haz lineal $\mathscr{L}$ subyacente al módulo de Drinfeld. Ya que e_1 es una sección que no se anula y α es un isomorfismo, entonces $\mathscr{O}_S \to \mathscr{L} : 1 \mapsto \alpha(e_1)$ provee tal trivialización. Consideremos los siguientes datos:

i) $\Phi(a_\lambda) = \sum_{i=0}^{N_\lambda} X_{\lambda,i}\tau^i$ para $\lambda = 1, \ldots, t$ donde

$$X_{\lambda,i} \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S), \quad N_\lambda := d\,\mathrm{gr}(a_\lambda) \quad \text{y} \quad X_{\lambda,N_\lambda} \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S)^\times.$$

ii) Para cada sección global $j \in (I^{-1}/A)^d$ sobre S, se tiene un elemento $\tilde{\alpha}(j) \in G[I](S) \subset \Gamma(S, \mathscr{O}_S)$, después de trivialización, tal que $\tilde{\alpha}(0) = 0$ y $\tilde{\alpha}(e_1) = 1$, sujetos a las siguientes condiciones:

(a) $\Phi(a_{\lambda'})\Phi(a_{\lambda''}) = \Phi(a_{\lambda''})\Phi(a_{\lambda'})$, $\forall \lambda', \lambda'' = 1, \ldots, t$. Por la propiedad universal del anillo de polinomios esta condición garantiza que obtenemos un homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_q[a_1, \ldots, a_t] &\to \Gamma(S, \mathscr{O}_S)\{\tau\} \\ a_\lambda &\mapsto \Phi(a_\lambda). \end{aligned}$$

(b) $f_\mu(\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_t)) = 0$, $\forall \mu = 1, \ldots, m$. Esta condición garantiza que el homomorfismo del inciso (a) se factoriza como

$$A \to \Gamma(S, \mathscr{O}_S)\{\tau\}.$$

(c) $\tilde{\alpha}(j' + j'') = \tilde{\alpha}(j') + \tilde{\alpha}(j'')$, $\forall j', j'' \in (I^{-1}/A)^d$ y $\tilde{\alpha}(a_\lambda \cdot j) = \Phi(a_\lambda)(\tilde{\alpha}(j))$, $\forall j \in (I^{-1}/A)^d$, $\forall \lambda = 1, \ldots, t$. Por lo tanto, se tiene un homomorfismo $(A/I)^d \to G[I]$.

(d) El polinomio

$$\prod_{j \in (I^{-1}/A)^d} (Z - \tilde{\alpha}(j)) \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S)\{\tau\}$$

es exactamente el máximo común divisor de los polinomios

$$\sum_{i=0}^{N_\lambda} X_{\lambda,i} Z^{q^i}$$

para $\lambda = 1, \ldots, t$. Eso significa que $(A/I)^d \cong G[I]$.

Sea $M_I^d = \operatorname{Spec}\left(A[X_{\lambda,i}, \tilde{\alpha}(j)]_{j \in (I^{-1}/A)^d}/J\right)$, para $i = 0, \ldots, N_\lambda$, en donde J es el ideal generado por los datos y relaciones anteriores. Entonces, vía el homomorfismo de A-esquemas $h : S \to M_I^d$, los datos anteriores definen un módulo de Drinfeld $(\tilde{G}, \Phi, \tilde{\alpha}) \in \mathrm{Drin}_{A,I}(M_I^d)$, en donde $\tilde{G}$ es el haz trivial sobre M_I^d. Además. $h : S \to M_I^d$ transporta la estructura de módulo de Drinfeld $(\tilde{G}, \Phi, \tilde{\alpha})$ a (G, ϕ, α). $\square$

El siguiente resultado, exhibe propiedades importantes del esquema M_I^d.

Proposición 2.16 ([8, §5]). *Bajo las hipótesis del Teorema 2.15, el esquema M_I^d es suave de dimensión $d-1$ sobre A (y por lo tanto de dimensión $d-1+\dim A = d$), y el morfismo estructural $M_I^d \to \operatorname{Spec}(A)$ es plano y suave sobre $\operatorname{Spec}(A) - V(I)$.*

Demostración. La parte conceptualmente complicada es probar que M_I^d es suave de dimensión d. El método de Drinfeld ([8, §4 y §5]), a grandes rasgos, es el siguiente. Consideremos un módulo de Drinfeld de rango d con una estructura de nivel I sobre un campo algebraicamente cerrado. Esta descripción corresponde a un *punto geométrico* del esquema M_I^d. El espacio de todas las *deformaciones* de este módulo de Drinfeld puede identificarse con el espectro de la completación del anillo local de M_I^d en el punto geométrico. Drinfeld define la noción de *módulo divisible* dotado de una estructura de nivel que se asocia a cada módulo de Drinfeld con estructura de nivel de tal manera que ambos objetos son canónicamente isomorfos. Señalamos en este punto que lo anterior dicho es un análogo al teorema de Serre-Tate que concierne a deformaciones de una *variedad abeliana* en característica $p > 0$ y deformaciones de sus *p-grupos divisibles* asociados. Drinfeld prueba entonces que el espacio de deformaciones de este módulo divisible sobre $\overline{\mathbb{F}}_q$ asociado a un módulo de Drinfeld es el espectro de un anillo regular de dimensión d. Esto implica que M_I^d es suave.

Notemos que si $0 \neq J \subset I$ es una inclusión de ideales de A se tiene una transformación natural de funtores $\mathcal{M}_J^d \to \mathcal{M}_I^d$, inducida por los monomorfismos canónicos $I^{-1}/A \to J^{-1}/A$ de A-módulos, dada por $(G, \beta, J) \mapsto (G, \alpha = \beta|_{(I^{-1}/A)^d}, I)$. Aquí, α es una I-estructura de nivel del módulo de Drinfeld subyacente ([8, §5]). La transformación natural induce morfismos canónicos $M_J^d \to M_I^d$ cuando $V(I)$ tiene más de un elemento. Una consecuencia de la suavidad de los esquemas M_I^d y M_J^d es que el morfismo $M_J^d \to M_I^d$ es plano debido a que los esquemas M_J^d y M_I^d son regulares ([16, Capítulo 14]). Por lo tanto, las fibras de $M_J^d \to M_I^d$ *varían de forma continua.* $\square$

En lo que sigue necesitaremos de las siguientes definiciones. Vamos a designar por $\mathbb{A} = \mathbb{A}_K$ al anillo de adeles de K que es, por definición, el producto restringido de elementos de K_x, en donde x corre sobre el conjunto $|\mathfrak{X}|$. De esta forma $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\infty \times K_\infty$, en donde $\mathbb{A}^\infty$ el anillo de adeles sin la componente al infinito. Sea $\hat{A} = \varprojlim A/I$, en donde el límite inverso corre sobre todos los ideales que no son cero de A.

Observe que, de la demostración de la Proposición 2.16, se tiene un sistema proyectivo, con respecto a la inclusión de ideales no cero de A, $\{M_I^d\}_I$.

Definición 2.17. Si se satisfacen las condiciones del Teorema 2.15, se define la variedad (o superficie) modular de Drinfeld como

$$M^d = \varprojlim M_I^d,$$

en donde el límite se induce por medio de la inclusión de ideales no cero de A.

Debido a la Proposición 2.16, la variedad modular de Drinfeld es un esquema normal que es fielmente plano sobre $\operatorname{Spec}(A)$. El esquema afín M^d trae consigo una acción del anillo de adeles como se observa en el siguiente resultado.

Proposición 2.18 ([8, §5])**.** *Sea $I \subset A$ un ideal que satisface las condiciones del Teorema 2.15. Existe una acción del grupo $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)/K^*$ sobre M^d.*

Demostración. Sea $(G, \phi) \in \mathrm{Drin}_A(S)$. Una *estructura de nivel total* para (G, ϕ) es un homomorfismo

$$\kappa : (K/A)^d \to G(S)$$

tal que su restricción a $(I^{-1}/A)^d$ define una I-estructura de nivel para (G, ϕ). Observe que M^d representa al funtor que a cada esquema S sobre A asocia el conjunto de clases de isomorfismo de módulos de Drinfeld sobre S con estructura de nivel total.

Consideremos un módulo de Drinfeld $(G, \phi) \in \mathrm{Drin}_A(S)$ con estructura de nivel total κ. Sea g una matriz en $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)$ cuyas entradas están en $\hat{A}$. Multiplicación por g define un epimorfismo $g : (K/A)^d \to (K/A)^d$ con núcleo finito P. Debido a un resultado de Drinfeld, [8, Proposición 4.4], se tiene que $(G/P, \phi') \in \mathrm{Drin}_A(S)$ con $\phi' : A \to \mathrm{End}(G/P)$. Sea $\kappa' : (K/A)^d \to G/P(S)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (K/A)^d & \xrightarrow{\kappa} & G(S) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow \\ (K/A)^d & \xrightarrow[\kappa']{} & G/P(S) \end{array}$$

es conmutativo. Entonces, nuevamente por [8, Proposición 4.4], κ' define una estructura de nivel total para $(G/P, \phi')$. Sea $a \in A - \{0\}$. Tomando $g = a \cdot \mathrm{Id}$ se sigue del diagrama conmutativo que $A - \{0\}$ actúa trivialmente sobre M^d. Finalmente, usando el isomorfismo canónico $\left(\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty) \cap \mathrm{Mat}_d(\hat{A})\right)/(A - \{0\}) \cong \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)/K^*$ se obtiene una acción de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)$ sobre M^d. $\square$

Cuando $d = 1$ se tiene una descripción explícita del esquema M^1 como lo dicta el siguiente teorema (comparar con [19]).

Teorema 2.19 (**Drinfeld** [8, §6]). *Sea* $I_K^\infty := \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}^\infty)$ *el grupo de ideles sin la componente* ∞. *El esquema* M^1 *es el espectro del anillo de enteros, del lugar* ∞, *de la máxima extensión abeliana de* K *que se descompone completamente en* ∞. *Además, la acción de* I_K^∞/K^* *sobre* M^1 *coincide con la acción de Galois de* $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ *sobre* M^1 *vía la aplicación de reciprocidad* $I_K/K^* \to \mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$.

Los campos de clase de K pueden construirse explícitamente como los campos generados por puntos de torsión de módulos de Drinfeld de rango uno distinguidos. Así que la afirmación del teorema 2.19 es un análogo simultáneo del *teorema de Kronecker-Weber* y del *teorema principal de multiplicación compleja* (véase [36]).

Veamos los puntos más sobresalientes de la prueba de Drinfeld al Teorema 2.19. Por la Proposición 7.1 de [8], se tiene que el morfismo $M_I^1 \to \mathrm{Spec}(A)$ es finito. Además, por la Proposición 2.16, el esquema M_I^1 es una curva suave, y el morfismo M_I^1 ramifica solamente sobre $V(I)$. Sea $v \in \mathrm{Spec}(A) - V(I)$, y sea $\pi \in \mathrm{Spec}(A_v)$. Se sigue, de la Proposición 5.5 de [8], que π actúa sobre $M_{I,v}^1$ como el Frobenius del campo residual $A_v/(\pi)$. Por lo tanto, cada componente conexa de M_I^1 es invariante con respecto a I_K^∞. Por otra parte, por los resultados de la sección 4.2.,

$$M^1(\overline{K}_\infty) = K^* \backslash I_K^\infty.$$

Además, la identificación anterior es consistente con la acción de $K^*\backslash I_K^\infty$. De esta forma, M^1 es conexo y $I_K^\infty/M^1 = \mathrm{Spec}(A)$. De la teoría de campos de clase (véase [34]) se deduce el resultado.

Sea U_I el núcleo de la aplicación natural $\mathrm{GL}_d(\hat{A}) \to \mathrm{GL}_d(\hat{A}/I\hat{A})$. El conjunto U_I consiste de las matrices en $\mathrm{GL}_d(\hat{A})$ que son congruentes a $1 \bmod I$ (*subgrupo de I-congruencia*). Para $J \subset I$, definimos

$$U_{I,J} := U_I/U_J.$$

Proposición 2.20 ([8, §5]). *Si* $I \subset A$ *es un ideal que satisface las condiciones del Teorema 2.15, entonces*

$$U_I \backslash M^d = M_I^d.$$

Demostración. Ya que $U_{I,J}$ actúa trivialmente sobre M_I^d, existe un morfismo canónico

$$U_{I,J} \backslash M_J^d \to M_I^d,$$

que es finito ([8, Proposición 5.4]). Ambos esquemas son regulares. Ya que M_I^d es plano sobre $\mathrm{Spec}(A)$, las imágenes de las componentes de M_I^d intersectan a $\mathrm{Spec}(A) - V(J)$. Por lo tanto, es suficiente mostrar que $\tilde{M}_I := M_I^d \times_{\mathrm{Spec}(A)} (\mathrm{Spec}(A) - V(J))$ es isomorfo a $U_{I,J}\backslash\tilde{M}_J$.

Se afirma que $\tilde{M}_J$ es un $U_{I,J}$-torsor. De hecho, es plano sobre $\tilde{M}_I$, y para cualquier esquema S sobre $\mathrm{Spec}(A) - V(I)$, podemos interpretar a $(\tilde{M}_J \times_{\tilde{M}_I} \tilde{M}_J)(S)$ como el conjunto de tripletas $(G, \alpha, \tilde{\alpha})$ que consisten de un módulo de Drinfeld sobre S junto con J-estructuras de nivel α y $\tilde{\alpha}$ que coinciden en $(I^{-1}/A)^d$. Por lo tanto, $\alpha^{-1}\alpha$ es una sección en $S \times U_{I,J}$. De este modo, la correspondencia

$$((G, \alpha), (G, \tilde{\alpha})) \mapsto ((\alpha^{-1}\tilde{\alpha}), (G, \alpha))$$

define un isomorfismo

$$\tilde{M}_J \times_{\tilde{M}_I} \tilde{M}_J \cong U_{I,J} \times \tilde{M}_J.$$

Ya que la correspondencia anterior es equivariante bajo $U_{I,J}$, en donde $U_{I,J}$ actúa sobre el primer factor, se sigue el isomorfismo. □

Para ideales arbitrarios de A, definimos el esquema M_I^d como el cociente de M^d por U_I. Para un subgrupo abierto arbitrario H de $\mathrm{GL}_d(\hat{A})$ definimos

$$M_H^d = H\backslash M^d.$$

Es claro que $M_H^d = M_I^d$ si $H = U_I$.

El resultado principal de Drinfeld se encuentra en linealizar a las variedades de Drinfeld por medio de su *cohomología étale*. Sin embargo, aquí yacen un par de obstrucciones. En primer lugar, la cohomología étale no es útil debido a la forma de los coeficientes que subyacen en la variedad de Drinfeld. En segundo lugar, si es posible resolver el primer punto, es necesario *agregar* puntos en las cúspides (compactificación). Es decir, es necesario tener a la mano compactificaciones para el morfismo canónico $M_I^d \to \mathrm{Spec}(A)$. La solución de Drinfeld para el primer punto es introducir una modificación a la cohomología étale (cohomología rígida) la cual estudiaremos en secciones subsecuentes. Sin embargo, la segunda obstrucción resulta ser de naturaleza más complicada. De este modo, Drinfeld logra compactificar la variedad de Drinfeld solo para el caso $d = 2$.

Teorema 2.21 (**Drinfeld** [8, §9])**.** *Sea I un ideal no cero de A tal que $V(I)$ contiene más de un elemento.*

1. *Existe una única (hasta isomorfismos) superficie suave* $\overline{M}_I^2$ *que contiene a* M_I^2 *como conjunto abierto denso en todas partes tal que el morfismo* $M_I^2 \to \operatorname{Spec}(A)$ *se extiende a un morfismo propio* $\overline{M}_I^2 \to \operatorname{Spec}(A)$*, y* $\overline{M}_I^2 - M_I^2$ *es finito sobre* $\operatorname{Spec}(A)$.

2. *Si* $J \subset I$*, entonces la proyección* $M_J^2 \to M_I^2$ *se extiende a un morfismo finito* $\overline{M}_J^2 \to \overline{M}_I^2$*, y la acción de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$ *sobre* M^2 *se extiende a una acción sobre* $\overline{M}^2 := \varprojlim \overline{M}_I^2$.

3. *El morfismo* $\overline{M}_I^2 \to \operatorname{Spec}(A)$ *es suave sobre* $\operatorname{Spec}(A) - V(I)$.

Como mencionamos anteriormente, es necesario transcribir las propiedades de la cohomología étale de la variedad de Drinfeld. Para esto, se estudian los $\mathbb{C}_\infty$ puntos de la variedad de Drinfeld (véase la sección 4.2.). Así que, en primera instancia, en lo que sigue revisaremos la teoría analítica de módulos de Drinfeld.

2.3. Teoría analítica de módulos de Drinfeld

La similitud entre curvas elípticas y módulos de Drinfeld se puede comprender de mejor forma desde el punto de vista analítico. Los módulos de Drinfeld pueden construirse a partir de latices en $\mathbb{C}_\infty$ de manera similar a como las curvas elípticas se construyen sobre el campo de los complejos.

Fijemos un subcampo completo F de $\mathbb{C}_\infty$.

Definición 2.22. Una A-*latiz en* $\mathbb{C}_\infty$ *sobre* F es un A-submódulo Λ de $\mathbb{C}_\infty$ que satisface

1. Λ es finitamente generado como A-módulo (por lo tanto proyectivo);

2. Λ es discreto en la topología de $\mathbb{C}_\infty$;

3. Si $F^{sep} \subset \mathbb{C}_\infty$ es la cerradura separable de F, entonces $\Lambda \subset F^{sep}$ y es estable bajo el grupo $\mathrm{Gal}(F^{sep}/F)$.

El rango $d > 0$ de una A-latiz Λ es su rango como submódulo finitamente generado y libre de torsión de $\mathbb{C}_\infty$.

Denotemos por $\mathrm{Lat}_A(F)$ al conjunto de A-latices de rango d en $\mathbb{C}_\infty$ sobre F. Sean Λ_1 y Λ_2 elementos de $\mathrm{Lat}_A(F)$. Un *morfismo* de Λ_1 a Λ_2, es un elemento $c \in F$ tal que $c\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Si $c \in F$ satisface que $c\Lambda_1 = \Lambda_2$, entonces diremos que Λ_1 es isomorfo a Λ_2 y $c \in F$ es un isomorfismo. De esta manera $\mathrm{Lat}_A(F)$ forma una categoría.

Es importante notar que, a comparación con el caso clásico en donde las latices tienen solo rango uno o dos, existen latices de cualquier rango debido a que $\mathbb{C}_\infty$ es una extensión infinita de K_∞.

De manera similar a la teoría de Weierstrass, podemos asociar a una A-latiz Λ su función exponencial.

Definición 2.23. Sea $\Lambda \in \mathrm{Lat}_A(F)$. Definimos la exponencial de Carlitz asociada a Λ como

$$e_\Lambda(z) := z \prod_{0 \neq \lambda \in \Lambda} (1 - z/\lambda)\,.$$

La función exponencial de Carlitz tiene propiedades similares a la función elíptica de Weierstrass.

Proposición 2.24. *Sea $\Lambda \in \mathrm{Lat}_A(F)$. La función exponencial de Carlitz asociada a Λ satisface las siguientes propiedades:*

1. *e_Λ converge, uniformemente sobre conjuntos acotados, y define una función entera $e_\Lambda : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$.*

2. *e_Λ tiene ceros simples en los puntos de Λ y no hay otros.*

3. *e_Λ es $\mathbb{F}_q$-lineal y sobreyectiva.*

La demostración de la proposición anterior puede encontrarse en [17, Capítulo 4]. Observe que, como consecuencia de la Proposición 2.24, se tiene $\ker(e_\Lambda(z)) = \Lambda$ y por lo tanto se sigue el isomorfismo de $\mathbb{F}_q$-espacios vectoriales

$$\mathbb{C}_\infty/\Lambda \cong \mathbb{C}_\infty.$$

Sea $\Lambda \in \mathrm{Lat}_A(F)$. Para $a \in A$, se tiene que siguiente igualdad de funciones enteras (véase [17, Teorema 4.3.1])

$$e_\Lambda(az) = \phi_a^\Lambda(e_\Lambda(z)),$$

en donde

$$\phi_a^\Lambda(z) = az \prod_{0 \neq \lambda \in a^{-1}\Lambda/\Lambda} (1 - z/e_\Lambda(\lambda)) \in F\{\tau\}.$$

Ya que $\{e_\Lambda(\lambda)\}_{\lambda \in a^{-1}\Lambda/\Lambda}$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}_q$, entonces ϕ_a^Λ es un polinomio lineal sobre $\mathbb{F}_q$.

Como consecuencia del teorema de estructura de módulos finitamente generados sobre dominios de Dedekind, se tiene el isomorfismo de A-módulos [17, Proposición 4.3.2]:

$$a^{-1}\Lambda/\Lambda \cong (A/I)^d.$$

En particular, $|a^{-1}\Lambda/\Lambda| = q^{d\,\mathrm{gr}(a)}$. Por lo tanto, $\mathrm{gr}\,\phi_a^{\Lambda} = d\,\mathrm{gr}(a)$.

Como consecuencia de lo dicho anteriormente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.25. *Sea $\Lambda \in \mathrm{Lat}_A(F)$. El polinomio $\mathbb{F}_q$-lineal ϕ_a^{Λ} induce una aplicación*

$$\begin{aligned} \phi^{\Lambda} : A &\to F\{\tau\} \\ a &\mapsto \phi_a^{\Lambda}. \end{aligned}$$

Además $\phi^{\Lambda} \in \mathrm{Drin}_A(F)$.

Nota 2.26. Sean $\Lambda \in \mathrm{Lat}_A(F)$ y $\phi^{\Lambda} \in \mathrm{Drin}_A(F)$. La acción de $a \in A$, vía ϕ_a^{Λ}, está determinada por el diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \mathbb{C}_\infty \arrow[r, "e_\Lambda"] \arrow[d, "a"] & \mathbb{C}_\infty \arrow[r] \arrow[d, "\phi_a^{\Lambda}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & \mathbb{C}_\infty \arrow[r, "e_\Lambda"] & \mathbb{C}_\infty \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sean $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathrm{Lat}_A(F)$ y $c \in F$ un morfismo entre Λ_1 y Λ_2. Sea $P : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ el polinomio $\mathbb{F}_q$-lineal dado por

$$P(z) := P_c(z) = cz \prod_{0 \neq \lambda \in c^{-1}\Lambda_2/\Lambda_1} (1 - z/e_{\Lambda_1}(\lambda)) \in \mathbb{C}_\infty.$$

Entonces (ver [17, Proposición 4.3.5]),

$$P\left(e_{\Lambda_1}(z)\right) = e_{\Lambda_2}(cz).$$

Esquemáticamente,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_\infty/\Lambda_1 \arrow[r, "c"] \arrow[d, "e_{\Lambda_1}"] & \mathbb{C}_\infty/\Lambda_2 \arrow[d, "e_{\Lambda_2}"] \\ \mathbb{C}_\infty \arrow[r, "P"] & \mathbb{C}_\infty \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, después de reemplazar z por az, la fórmula anterior afirma que

$$P\phi_a^{\Lambda_1} = \phi_a^{\Lambda_2} P.$$

De esta manera P define un morfismo entre ϕ^{Λ_1} y ϕ^{Λ_2}.

Hemos encontrado así al funtor

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Lat}_A(F) &\to \mathrm{Drin}_A(F) \\ \Lambda &\mapsto \phi^{\Lambda}. \end{aligned}$$

Teorema 2.27 (**Drinfeld** [8, §3])**.** *Se tiene un isomorfismo entre las categorías* $\mathrm{Lat}_A(F)$ *y* $\mathrm{Drin}_A(F)$ *vía el funtor* $\Lambda \mapsto \phi^{\Lambda}$.

Como consecuencia inmediata obtenemos que, para cualquier anillo A y para cualquier $d > 0$ un entero, existen A-módulos de Drinfeld de rango d sobre K_∞^{sep}.

3. Geometría analítica rígida de acuerdo a Tate

Para los propósitos subsecuentes, usaremos el lenguaje de geometría analítica rígida. Por tal razón, es conveniente explicar algunas de las ideas básicas que rodean a la teoría de Tate.

En esta sección, denotaremos por L un campo no arquimediano; es decir un campo completo con respecto a un valor absoluto no arquimediano no trivial que denotaremos por $|\bullet|$.

La idea de la geometría analítica rígida (introducida y desarrollada por Tate [37]) es tener un análogo no arquimediano de la noción de espacios analíticos complejos. En particular, debe existir un funtor

$$\begin{aligned} \{\text{Esquemas localmente de tipo finito}/L\} &\to \{\text{Espacios analíticos rígidos}/L\} \\ X &\mapsto X^{\mathrm{an}}. \end{aligned}$$

Además, tal funtor debe verificar que si un esquema localmente de tipo finito es conexo (regular, reducido, separado, etc.), su analitificación también es conexa (regular, reducida, separada, etc.).

Las referencias para este capítulo son [4], [11], [5] y [37].

3.1. Álgebras afinoides

Sea $\overline{L}$ una cerradura algebraica fija para L. Para $n \geq 1$, denotamos como $\mathbb{D}^n(\overline{L})$ al polidisco unitario de dimensión n,

$$\mathbb{D}^n(\overline{L}) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{L}^n \mid |x_i| \leq 1, \forall i\}.$$

Este conjunto está dotado, de manera natural, de una topología inducida por el valor absoluto sobre $\overline{L}$. Nótese que debido a que el valor absoluto es no arquimediano, la topología es totalmente disconexa sobre $\mathbb{D}^n(\overline{L})$.

Definición 3.1. El *álgebra de Tate*, $T_n = T_n(L) := L\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$, sobre L se define como

$$T_n = \left\{ f = \sum_{s=(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{N}^n} a_s t_1^{s_1} \cdots t_n^{s_n} \;\middle|\; a_s \in L, \lim_{s_1+\cdots+s_n\to\infty} |a_s| = 0 \right\}.$$

En otras palabras, $T_n(L)$ es el subanillo de series de potencias formales en $L[[t_1, \ldots, t_n]]$ que convergen sobre $\mathbb{D}^n(\overline{L})$.

La norma sobre L puede extenderse a una norma, *la norma de Gauss*, sobre T_n como

$$||f|| := \max_{s\in\mathbb{N}^n} |a_s|.$$

La norma de Gauss es multiplicativa y el álgebra de Tate es completa con respecto a esta norma; es decir, el álgebra de Tate es una L-álgebra de Banach ([4, §5.1]). El teorema de preparación de Weierstrass funciona para $T_n(L)$ ([11, Teorema 3.1.1]) y, como consecuencia, es posible obtener propiedades similares al anillo de polinomios. La prueba de la siguiente proposición puede encontrarse en [11, Teorema 3.2.1].

Proposición 3.2 (**Tate**). *El álgebra de Tate posee las siguientes propiedades:*

- *T_n es noetheriano y Jacobson (el radical de cualquier ideal de T_n es la intersección de todos los ideales maximales que lo contiene)*
- *Cualquier ideal de T_n es cerrado con respecto a la norma de Gauss.*
- *Para cualquier ideal maximal $\mathfrak{m}$ en T_n, el campo residual $T_n/\mathfrak{m}$ es una extensión finita de L.*

La última propiedad de la Proposición 3.2, es un análogo del teorema de los ceros de Hilbert y tiene la siguiente importante consecuencia. Sea $x \in \mathbb{D}^n(\overline{L})$. Consideremos el conjunto $\mathrm{Max}(T_n)$ de ideales maximales de T_n. Para $f \in T_n$ y $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(T_n)$, se define $f(\mathfrak{m})$ como la clase residual de f en $T_n/\mathfrak{m}$. Ya que $T_n/\mathfrak{m}$ es una extensión finita de L entonces existe un encaje $T_n/\mathfrak{m} \hookrightarrow \overline{L}$ y, por lo tanto, $f(\mathfrak{m})$ puede verse como un elemento de $\overline{L}$. Sin embarg el encaje no es, en general, único. Esto último significa que $f(\mathfrak{m})$ está determinado hasta conjugación sobre L. Si $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$, entonces cualquier $f \in T_n$ puede ser visto como una función sobre $\mathrm{Max}(T_n)$ que toma valores en $\overline{L}/\Gamma$.

Para $x \in \mathbb{D}(\overline{L})$, denótese por $\mathfrak{m}_x$ al ideal constituido de todos los elementos $f \in T_n$ que se anulan en x. Sea $L(x)$ la extensión finita de L generada por todas las componentes de x. Consideremos el epimorfismo,

$$\begin{aligned} h_x : T_n(L) &\to L(x) \\ f &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Entonces, $\mathfrak{m}_x = \ker(h_x)$ es un ideal maximal de T_n. Note que, en lo anterior, hemos usado el hecho de que L es completo, lo cual implica que cualquier extensión finita de L es completo para una extensión única de la valuación y, por este hecho, $f(x) \in L(x)$ para $f \in T_n$.

De esta manera, existe una aplicación canónica

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{D}^n(\overline{L}) &\to \mathrm{Max}(T_n) \\ x &\mapsto \mathfrak{m}_x. \end{aligned}$$

Observe que, para x y x' elementos de $\mathbb{D}^n(\overline{L})$, $\rho(x) = \mathfrak{m} = \rho(x')$ si y sólo si existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(x) = x'$. Por lo tanto, la aplicación ρ induce una aplicación inyectiva

$$\mathbb{D}^n(\overline{L})/\Gamma \to \mathrm{Max}(T_n).$$

Es posible obtener una inversa de la aplicación anterior como sigue. Para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ de T_n, se tiene una órbita de Galois vía la imagen de la composición $T_n \twoheadrightarrow T_n/\mathfrak{m} \hookrightarrow \overline{L}$.

En resumen, tenemos una biyección

$$\mathbb{D}^n(\overline{L})/\Gamma \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Max}(T_n).$$

Por lo tanto, los elementos de T_n pueden verse como funciones sobre $\mathbb{D}^n(\overline{L})$ o sobre $\mathrm{Max}(T_n)$. De esta manera, el espectro maximal $\mathrm{Max}(T_n)$ aparece como un modelo algebraico para el espacio $\mathbb{D}^n$. Esto sugiere que se puede proceder como Grothendieck hizo en la geometría algebraica y definir una categoría de espacios analíticos como espectros (maximales) de ciertas álgebras.

Así como los esquemas algebraicos afines sobre un campo se obtienen como cocientes de anillos de polinomios, y éstos resultan ser los espacios modelos locales a partir de los cuales los esquemas generales se construyen, los espacios analíticos rígidos se obtendrán como cocientes de álgebras de Tate.

Definición 3.3. Sea $I \subset T_n(L)$ un ideal. Una *L-álgebra afinoide* $\mathcal{A}$ es una L-álgebra tal que, para alguna $n \in \mathbb{N}$, se tiene el isomorfismo de L-álgebras
$$\mathcal{A} \cong T_n(L)/I.$$

Denotemos por Af_L a la categoría de L-álgebras afinoides cuyos morfismos son homomorfismos de L-álgebras afinoides.

Para cualquier $\mathcal{A} \in \mathrm{Af}_L$, denotemos por $\mathrm{Max}(\mathcal{A})$ al conjunto de ideales maximales de $\mathcal{A}$. Se tienen las siguientes propiedades (véase [37]):

- $\mathcal{A}$ es noetheriana y Jacobson.
- $\mathcal{A} \cong T_n/I$ es una L-álgebra de Banach con respecto a la norma cociente sobre $\mathcal{A}$; esto es, con respecto a la norma
$$||\overline{f}|| = \text{ínf}\{||f+g|| \mid g \in I\}.$$
Esto es posible debido a que I es cerrado en T_n.
- La topología sobre $\mathcal{A}$ es independiente de la norma cociente elegida.
- Cualquier homomorfismo entre L-álgebras afinoides es continua.
- $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ es una extensión finita de L, para cada $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathcal{A})$.

Sea $\mathcal{A} \in \mathrm{Af}_L$. Por simplicidad en la exposición supondremos que $\mathcal{A}$ es reducida. Sea I un ideal de T_n y sea $X \subset \mathrm{Max}(T_n)$ el conjunto de ideales maximales $\mathfrak{m}$ de T_n tales que todos los elementos de I inducen cero en el campo residual $T_n/\mathfrak{m}$. Por restricción, los elementos de T_n pueden pensarse como elementos sobre X. Ya que T_n es Jacobson y $\mathcal{A}$ se supone reducida, el elemento $f \in T_n$ es 0 sobre X, si y sólo si $f \in I$. En particular, los elementos de $\mathcal{A}$ pueden pensarse como funciones sobre X. La sobreyección $T_n \to \mathcal{A}$ induce una aplicación $\mathrm{Max}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Max}(T_n)$. Esta aplicación, induce una biyección entre $\mathrm{Max}(\mathcal{A})$ y X, de tal forma que los elementos de $\mathcal{A}$ pueden pensarse como funciones sobre $\mathrm{Max}(\mathcal{A})$.,

3.2. Subdominios afinoides

Necesitamos imponer una topología adecuada sobre $\mathrm{Max}(\mathcal{A})$ con respecto a la cual la noción de conexidad tenga un sentido apropiado. Usando la descripción de $\mathrm{Max}(T_n)$ como las órbitas de Galois en $\mathbb{D}^n(\overline{L})$ obtenemos, a partir de la topología de $\overline{L}^n$, una topología sobre $\mathrm{Max}(\mathcal{A})$.

Definición 3.4. Sea $\mathcal{A} \in \mathrm{Af}_L$ y $X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$. La topología generada por todos los conjuntos de la forma

$$X(f;\epsilon) = \{x \in X \mid |f(x)| \leq \epsilon\},$$

para $f \in \mathcal{A}$ y $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, se llama la topología canónica de X.

Así, un subconjunto $U \subset X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$ es abierto, con respecto a la topología canónica, si y sólo si es unión de intersecciones finitas del tipo $X(f;\epsilon)$.

A continuación, introducimos una clase especial de subconjuntos abiertos de $\mathrm{Max}(\mathcal{A})$.

Definición 3.5. Sea $\mathcal{A} \in \mathrm{Af}_L$ y $X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$. Un subconjunto U de X es un subdominio afinoide, si el funtor covariante

$$\begin{aligned} &\mathrm{Af}_L \to \mathrm{Set} \\ &\quad \mathcal{B} \mapsto \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Af}_L}(\mathcal{A},\mathcal{B}),\ \varphi(\mathrm{Max}(\mathcal{B})) \subset U\}, \end{aligned}$$

es representable.

Por el lema de Yoneda, si $U \subset X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$ es un subdominio afinoide entonces la L-álgebra afinoide $\mathcal{A}'$ de la definición precedente es única hasta isomorfismos de $\mathcal{A}$-álgebras únicos y la denotaremos por $\mathscr{O}_X(U)$. Se tiene, de la definición, que $\mathscr{O}_X(X) = \mathcal{A}$

La propiedad de ser un subdominio afinoide es transitiva en el sentido siguiente: Si $U \subset \mathrm{Max}(\mathcal{A})$ es un subdominio afinoide correspondiente al morfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y si $V \subset \mathrm{Max}(\mathcal{B})$ es el subdominio afinoide correspondiente al morfismo $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ entonces $\varphi(V) \subset U$ es un subdominio afinoide en X correspondiente al morfismo $\psi \circ \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$.

Los subdominios afinoides se preservan bajo pullback e intersecciones finitas ([4, §7.2.2]).

Ejemplo 3.6 ([4, §7.2.3])**.** Sea $\mathcal{A} \in \mathrm{Af}_L$ y $X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$.

1. Un subconjunto del tipo

   $$X(f_1,\ldots,f_n) = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq 1\},$$

   para funciones

   $$f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{A},$$

   se llama un *subdominio de Weierstrass* en X.

2. Un subconjunto en X del tipo

$$X(f_1, \dots, f_n, g_1^{-1}, \dots, g_m^{-1}) = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq 1, |g_j(x)| \geq 1\},$$

para funciones

$$f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{A},$$

se llama *subdominio de Laurent* en X.

3. Un subconjunto en X del tipo

$$X\left(\frac{f_1, \dots, f_n}{f_0}\right) = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq |f_0(x)|\},$$

para funciones

$$f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{A}$$

que generan a $\mathcal{A}$ (es decir $f_0, f_1, \dots, f_n$ no tienen ceros en común sobre X), se llama *subdominio racional* en X.

Por ejemplo, la L-álgebra afinoide correspondiente al subdominio abierto racional de $X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$ es la L-álgebra afinoide

$$\mathcal{A}' := \mathcal{A}\langle t_1, \dots, t_n\rangle/(f_0 t_i - f_i,\ i = 1, \dots, n),$$

en donde $\mathcal{A}\langle t_1, \dots, t_n\rangle$ es

$$\left\{ \sum_{s=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{N}^n} a_s t_1^{s_1} \cdots t_n^{s_n} \in \mathcal{A}[[t_1, \dots, t_r]] \;\middle|\; \lim_{s_1+\cdots+s_n\to\infty} |a_s| = 0 \right\}.$$

Los subdominios definidos en el ejemplo anterior son abiertos en $X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$ con respecto a la topología canónica. Los subdominios de Weierstrass forman una base para esta topología ([4, §7.2.1 y §7.2.3])

Teorema 3.7 (**Gerritzen-Grauert** [4, §7.3.5])**.** *Sea $\mathcal{A} \in \mathrm{Af}_L$. Cada subdominio afinoide $U \subset X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$ es una unión finita de dominios racionales.*

3.3. Espacios analíticos rígidos

A continuación, describiremos la *topología de Tate*. Estrictamente hablando, la topología de Tate *no* es una topología, sino un caso especial de una topología de Grothendieck.

Recordemos la definición de topología de Grothendieck (ver [4, §9.1] para los detalles). Sea X un conjunto. Dotar a X con una topología de Grothendieck es especificar una colección de subconjuntos $\mathcal{G}$ (los subconjuntos abiertos) de X y, para cada $U \in \mathcal{G}$, un conjunto $\mathrm{Cov}(U) \subset 2^{\mathcal{G}}$ de cubiertas de U por elementos de $\mathcal{G}$, que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{G}$ es estable bajo intersecciones finitas y contiene a $\emptyset$,
2. $\{U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ para cada $U \in \mathcal{G}$,
3. si $\{U_i\} \in \mathrm{Cov}(U)$ y $V \subset U$ entonces $V \in \mathcal{G}$ si y sólo si $V \cap U_i \in \mathcal{G}$ para cada i,
4. si $\{U_i\} \in \mathrm{Cov}(U)$ y $\{V_{i,j}\}_{j \in J_i}$ entonces $\{V_{i,j}\} \in \mathrm{Cov}(U)$.

Diremos que un conjunto X dotado de una topología de Grothendieck es un *espacio G-topologizado*. Si X es un espacio G-topologizado con una colección de subconjuntos abiertos $\mathcal{G}$ asociada, entonces podemos dotar a cualquier $U \in \mathcal{G}$ con una estructura de espacio G-topologizado usando $\mathcal{G}_U = \{V \in \mathcal{G} \mid V \subset U\}$ como la colección de subconjuntos abiertos de U y usando la misma colección de cubiertas.

Hacemos mención que existe una noción obvia de gavilla sobre un espacio G-topologizado y, si $U \in \mathcal{G}$ y $\mathscr{F}$ es una gavilla sobre X, entonces el funtor $\mathscr{F}_U : V \to \mathscr{F}(V)$ sobre $\mathcal{G}_U$ es una gavilla sobre U ([4, Capítulo 9]).

Sean $(X, \mathscr{O}_X)$ y $(X', \mathscr{O}_{X'})$ dos espacios G-topologizados con $\mathscr{O}_X$ y $\mathscr{O}_{X'}$ gavillas de L-ágebras. Un *morfismo* $(X', \mathscr{O}_{X'}) \to (X, \mathscr{O}_X)$ es una pareja $h : X' \to X$ y $h^\# : \mathscr{O}_X \to h_*(\mathscr{O}_{X'})$ en donde h es continua (en el sentido de que h respeta la clase de abiertos y sus cubiertas) y $h^\#$ es un morfismo de L-álgebras.

Si $(X, \mathscr{O}_X)$ es un espacio G-topologizado y $\mathscr{O}_X$ es tal que sus tallos en cualquier $x \in X$ (el tallo de $\mathscr{O}_X$ en x es el límite inductivo de $\mathscr{O}_X(U)$ sobre todos los abiertos $U \in \mathcal{G}$ que contienen a x) son anillos locales, diremos que $(X, \mathscr{O}_X)$ es un *espacio G-topologizado localmente anillado*. Espacios G-topologizados localmente anillados forman una categoría ([4, §9.3.1]).

Denotaremos por Gtop_L a la categoría de espacios G-topologizados localmente anillados cuya gavilla estructural es una L-álgebra.

La definición clave en la teoría es la siguiente.

Definición 3.8. Sea $\mathcal{A} \in \mathrm{Af}_L$. Un subconjunto $U \subset X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$ es un *abierto admisible* si tiene una cubierta por subdominios afinoides

$U_i \subset \mathrm{Max}(\mathcal{A})$ tal que para cualquier $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ con $\varphi(\mathrm{Max}(\mathcal{B})) \subset U$, la cubierta $\varphi^{-1}(U_i)$ admite una subcubierta finita. Una colección $\{V_j\}$ de subconjuntos abiertos admisibles de X es una *cubierta admisible* de su unión V (necesariamente abierto admisible) si para cualquier $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ con $\varphi(\mathrm{Max}(\mathcal{B})) \subset V$, la cubierta $\varphi^{-1}(V_j)$ de $\mathrm{Max}(\mathcal{B})$ admite un refinamiento que es una cubierta finita por afinoides abiertos de $\mathcal{B}$.

Se define la *topología de Tate* sobre $X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$ como la topología de Grothendieck que tiene como conjuntos abiertos a los subconjuntos abiertos admisibles y como cubiertas a las cubiertas abiertas admisibles.

El resultado fundamental que exhibe la existencia de una *gavilla estructural* con respecto a la topología de Tate es el siguiente.

Teorema 3.9 (**Teorema de aciclicidad de Tate** [4, 8.2.1/1])**.** *Sea $\mathcal{A} \in \mathrm{Af}_L$ y $X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$. La asignación $U \mapsto \mathscr{O}_X(U)$ se extiende de manera única a una gavilla $\mathscr{O}_X$ con respecto a la topología de Tate sobre X. En particular, si $\{U_i\}$ es una colección finita de subdominios afinoides con $U = \bigcup U_i$ también un subdominio afinoide de X entonces la sucesión*

$$0 \to \mathscr{O}_X(U) \to \prod_i \mathscr{O}_X(U_i) \to \prod_{i,j} \mathscr{O}_X(U_i \cap U_j)$$

es exacta.

Note que la condición sobre la cubierta permite evadir a funciones localmente constantes. Por ejemplo el disco unitario cerrado no es la unión disjunta de un número finito de subdominios afinoides ya que el álgebra de Tate es un dominio.

Definición 3.10. Sea $\mathcal{A} \in \mathrm{Af}_L$ y $X = \mathrm{Max}(\mathcal{A})$. Si $\mathscr{T}$ es una topología de Tate y $\mathscr{O}_X$ es una gavilla con respecto a $\mathscr{T}$, entonces la tripleta $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}) := (X, \mathscr{T}, \mathscr{O}_X)$ se llama espacio afinoide de $\mathcal{A}$ sobre L.

Nota 3.11. Por definición, $\mathrm{Sp}(T_n) = \mathbb{D}^n$.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Af}_L$ y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfismo. Entonces, obtenemos un morfismo $\mathrm{Sp}(\varphi) : \mathrm{Sp}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ usando a $h : \mathrm{Max}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Max}(\mathcal{A})$ y a la aplicación $\mathscr{O}_{\mathrm{Max}(\mathcal{A})} \to h_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Max}(\mathcal{B})})$ que está definida sobre subdominios afinoides $U \subset \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ vía $\mathscr{O}_{\mathrm{Max}(\mathcal{A})}(U) \to \mathscr{O}_{\mathrm{Max}(\mathcal{B})}(h^{-1}(U))$.

También, debido a [4, 9.3.1/1], se tiene que la asignación $\mathcal{A} \mapsto \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ es un funtor contravariante fielmente pleno; esto es, la aplicación canónica

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Af}_L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gtop}_L}(\mathrm{Sp}(\mathcal{B}), \mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$$

es biyectiva.

Definición 3.12. Un *espacio analítico rígido sobre* L es una pareja $(X, \mathscr{O}_X)$ que consiste de un espacio G-topologizado localmente anillado cuya gavilla estructural es una gavilla de L-álgebras tal que existe $\{U_i\} \in \mathrm{Cov}(X)$ con cada $(U_i, \mathscr{O}_X|_{U_i})$ isomorfo a un espacio afinoide $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_i)$ para $\mathcal{A}_i \in \mathrm{Af}_L$.

Un morfismo de espacios analíticos rígidos es un morfismo de espacios G-topologizados localmente anillados. Denotaremos por Rig_L a la categoría de espacios analíticos rígidos sobre L.

Existe un functor natural

$$\begin{aligned} \mathrm{Sch}_L &\to \mathrm{Rig}_L \\ X &\mapsto X^{\mathrm{an}}, \end{aligned}$$

que asocia, a cada esquema X localmente de tipo finito sobre L, un espacio analítico rígido X^{an} sobre L junto con un morfismo natural de espacios G-topologizados localmente anillados

$$\mathrm{an}_X : X^{\mathrm{an}} \to X$$

con la propiedad universal de que, cualquier morfismo de espacios G-topologizados $Y \to X$, donde $Y \in \mathrm{Rig}_L$, se factoriza a través de X.

Como en esquemas (ver [16, §3.5]), es posible construir espacios analíticos rígidos por procedimientos de pegado ([4, 9.3.2/1]). Dicho esto, para demostrar la existencia de X^{an} es suficiente considerar el caso de un esquema afín de tipo finito $X = \mathrm{Spec}(R)$ sobre L. Defínase, como conjunto, $X^{\mathrm{an}} = \mathrm{Max}(R)$. Para definir una estructura analítica fijamos una presentación de R como

$$R = L[t_1, \dots, t_i]/\mathfrak{a}$$

para un ideal $\mathfrak{a}$ de $L[t_1, \dots, t_i]$. Fijemos $c \in K$ con $|c| > 1$. Para $n \geq 0$, sea

$$U_n := \{x \in X^{\mathrm{an}} \mid \max_j |t_j(x)| \leq |c|^n\}$$

de modo que

$$X^{\mathrm{an}} = \bigcup_{n \geq 0} U_n.$$

Definimos L-álgebras afinoides como

$$\mathcal{A}_n := L\langle t_1, \dots, t_i\rangle/(P(c^{-n}t_j) : P \in \mathfrak{a}).$$

Vía $t_j \mapsto c^{-n}t_j$, tenemos identificaciones entre $\mathrm{Max}(\mathcal{A}_n)$ y U_n de modo que, del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Max}(\mathcal{A}_n) \arrow[r] \arrow[d] & U_n \arrow[d] \\ \mathrm{Max}(\mathcal{A}_{n+1}) \arrow[r] & U_{n+1} \end{tikzcd}$$

se sigue que X^{an} tiene una única estructura L-analítica tal que $X^{\mathrm{an}} = \bigcup_{n\geq 0} U_n$ es una cubierta admisible por subconjuntos abiertos afinoides U_n isomorfos a $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_n)$; el morfismo $\mathrm{an}_X : X^{\mathrm{an}} = \mathrm{Max}(\mathcal{A}) \to X = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ es la *aplicación inclusión*.

En general, X^{an} visto como conjunto consiste de los puntos cerrados del esquema X.

Ejemplo 3.13. Analitificación de variedades algebraicas sobre L.

1. Sea $\mathbf{A}_L^n = \mathrm{Spec}(L[t_1, \ldots, t_n])$ el espacio afín de dimensión n sobre L. Escogemos $c \in L$ tal que $0 < |c| < 1$. La analitificación de $\mathbf{A}_L^n$, denotada $\mathbf{A}_L^{n,\mathrm{an}}$, se obtiene de la construcción anterior tomando a $\mathfrak{a}$ como el ideal cero.

2. El espacio proyectivo $\mathbf{P}_L^n$ puede obtenerse pegando $n+1$ copias del espacio afín. Por lo tanto sucede que $\mathbf{P}_L^{n,\mathrm{an}}$ tiene una cubierta admisible por $n+1$ espacios afinoides $\{U_i\}_{i=0}^n$ cada uno isomorfo al polidisco de dimensión n. Tomamos para U_i el espacio afinoide

$$\mathrm{Sp}\left(L\left\langle \frac{t_0}{t_i}, \ldots, \frac{t_{i-1}}{t_i}, \frac{t_{i+1}}{t_i}, \ldots, \frac{t_n}{t_i} \right\rangle\right).$$

4. El semiplano superior de Drinfeld y uniformización de espacios modulares

Para un entero $d > 0$, el semiplano superior de Drinfeld $\Omega^d := \Omega^d(\mathbb{C}_\infty)$ se define como el complemento de todos los hiperplanos definidos sobre K_∞ en $\mathbf{P}^{d-1}(\mathbb{C}_\infty)$ (considerado como espacio analítico rígido). El grupo $\mathrm{GL}_d(K_\infty)$ actúa sobre $\mathbf{P}^{d-1}(\mathbb{C}_\infty)$ de acuerdo a la fórmula

$$(g; [z_1 : \cdots : z_d]) \mapsto [z_1 : \cdots : z_d]g^{-1}.$$

El conjunto Ω^d es un subconjunto $\mathrm{GL}_d(K_\infty)$-invariante de $\mathbf{P}^{d-1}(\mathbb{C}_\infty)$.

Cuando $d = 2$, $\Omega^2 = \mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty) - \mathbf{P}^1(K_\infty)$ es el análogo no arquimediano del doble semiplano de Poincaré $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) - \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$.

En ésta sección, se describe la estructura analítica rígida de Ω^d utilizando un objeto combinatorio conocido como el inmueble de Bruhat Tits. En la última parte, se da una descripción adélica de los puntos en $\mathbb{C}_\infty$ de la variedad modular de Drinfeld como cocientes del semiplano superior de Drinfeld.

4.1. Estructura rígida del semiplano superior de Drinfeld

Para una mejor claridad en la exposición, tomaremos $d = 2$, que es el caso en el cual estaremos interesados en los capítulos subsecuentes, refiriendo a [7, Capítulo 3] y a [8, §6] para el caso general.

4.1.1. El inmueble de Bruhat-Tits

Sea $\mathcal{O}_\infty := \mathcal{O}_{K_\infty}$ el anillo de enteros de K_∞ y $\pi = \pi_\infty$ un uniformizante de $\mathcal{O}_\infty$. Sea $k := \kappa(\infty) = \mathcal{O}_\infty/\pi\mathcal{O}_\infty$ el campo residual de característica $p > 0$ y q_∞ su orden. Denotemos por $|\bullet|$ a la norma sobre $\mathbb{C}_\infty$ normalizada de modo que $|\pi| = q_\infty^{-1}$.

Definición 4.1. Una *latiz* Λ de K_∞^2 es un $\mathcal{O}_\infty$-submódulo libre de rango 2.

La clase de dilatación (u homotecia) $[\Lambda]$ de una latiz Λ es el conjunto de todas las latices $\lambda\Lambda$ con $\lambda \in K_\infty^*$ en el espacio vectorial K_∞^2.

Definición 4.2. *El inmueble de Bruhat-Tits*, denotado por $\mathcal{T}$, para el grupo $\mathrm{PGL}_2(K_\infty)$ es el complejo simplicial cuyos vértices son las clases de dilatación de latices en K_∞^2 y un vértice $[\Lambda_1]$ se une por una arista a $[\Lambda_2]$ si existe un representante Λ_2 tal que $\pi\Lambda_1 \subsetneq \Lambda_2 \subsetneq \Lambda_1$.

La *realización geométrica* del inmueble de Bruhat-Tits $\mathcal{T}$, denotada por τ, es por definición

$$\tau = \{(1-t)[\Lambda_1] + t[\Lambda_2] \mid t \in [0,1]\}.$$

Se satisfacen las las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{T}$ es un árbol (es decir, un complejo simplicial 1-dimensional contraíble) donde cada vértice tiene exactamente $q_\infty + 1$ vecinos: las aristas provenientes del vértice $[\Lambda]$ están en biyección con las líneas de $\Lambda/\pi\Lambda$ o, dicho de otra manera, con $\mathbf{P}^1(k)$ ([32, Capítulo II §1]).

2. $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ actúa sobre $\mathcal{T}$ ([32, loc. cit.]).

3. Denotemos por $N(K_\infty^2)$ al espacio topológico de clases de similitud de normas (no arquimedianas) reales sobre K_∞^2. Entonces, $N(K_\infty^2)$ se identifica (de manera $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$-equivariante) con la realización geométrica τ de $\mathcal{T}$. Esto es, se tiene una biyección,

$$\upsilon : N(K_\infty^2) \to \tau,$$

dada como sigue (véase [15]):

a) A cada vértice $[\Lambda]$ le corresponde la clase de la norma $|\bullet|_\Lambda$ tal que la correspondiente bola unitaria es Λ. Si (e_1, e_2) es una base para Λ y si $v = a_1e_1 + a_2e_2 \in K_\infty^2$, se tiene

$$|v|_\Lambda := \sup\{|a_1|, |a_2|\}$$

b) Si $[\Lambda_1]$ y $[\Lambda_2]$ son dos vértices adyacentes con $\pi\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \Lambda_1$, existe una base (e_1, e_2) de Λ_1 tal que $(e_1, \pi e_2)$ es una base para Λ_2. Para $v = a_1e_1 + a_2e_2$ se tiene

$$|v|_{\Lambda_1} = \sup\{|a_1|, |a_2|\} \qquad \text{y} \qquad |v|_{\Lambda_2} = \sup\{|a_1|, q_\infty|a_2|\}.$$

A un punto $x = (1-t)[\Lambda_1] + t[\Lambda_2] \in \tau$, con $0 < t < 1$, que se encuentra entre vértices adyacentes $[\Lambda_1]$ y $[\Lambda_2]$ le corresponde la clase de la norma definida por

$$|v|_t := \sup\{|a_1|_{\Lambda_1}, q_\infty^t |a_2|_{\Lambda_2}\}.$$

Se tiene, para $q_\infty^t \leq \alpha < q_\infty$,

$$\Lambda_1 = \{v \in K_\infty^2 \mid |v|_t \leq \alpha\}.$$

Para $1 \leq \alpha < q_\infty^t$,

$$\Lambda_2 = \{v \in K_\infty^2 \mid |v|_t \leq \alpha\}.$$

c) Recíprocamente, sea $|\bullet|$ una norma sobre K_∞^2. Para $\alpha > 0$, la colección

$$\Lambda_\alpha = \{v \in K_\infty^2 \mid |v| \leq \alpha\}$$

es una latiz en K_∞^2. Se tiene que $\Lambda_{\alpha'} \subset \Lambda_\alpha$ si $\alpha' \leq \alpha$ y $\Lambda_{q_\infty^{-1}\alpha} = \pi\Lambda_\alpha$; así que $[\Lambda_\alpha]$ toma, a lo más, dos valores en el conjunto de clases de homotecias conforme α varía. Si $[\Lambda_\alpha]$ es constante, entonces $|\bullet|$ corresponde a $[\Lambda_\alpha]$. Si no sucede así, entonces $[\Lambda_\alpha] = s$ o $[\Lambda_\alpha] = s'$ con s y s' vértices adyacentes. Después de cambiar $|\bullet|$ por una norma proporcional, si es necesario, se tiene que $[\Lambda_\alpha] = s$ para $q_\infty^t \leq \alpha < q_\infty$ y $[\Lambda_\alpha] = s'$ para $1 \leq \alpha < q_\infty^t$, con $0 < t < 1$. Entonces $|\bullet|$ corresponde al punto $x = (1-t)s + ts'$.

4.1.2. La aplicación inmueble

En lo que sigue, definiremos una aplicación entre el semiplano superior de Drinfeld Ω^2 y la realización geométrica del inmueble de Bruhat-Tits τ.

Denotemos por $\mathrm{Mon}_{K_\infty}(K_\infty^2, \mathbb{C}_\infty)$ al conjunto de morfismos K_∞-lineales de K_∞^2 a $\mathbb{C}_\infty$ que son inyectivos. Se tiene la siguiente descripción de Ω^2.

Proposición 4.3. *El conjunto Ω^2, se identifica con el conjunto de clases de $\mathbb{C}_\infty^*$-homotecias de morfismos K_∞-lineales inyectivas de K_∞^2 en $\mathbb{C}_\infty$; es decir, se tiene la biyección*

$$\begin{aligned} \varrho : \mathrm{Mon}_{K_\infty}(K_\infty^2, \mathbb{C}_\infty)/\mathbb{C}_\infty^* &\to \Omega^2 \\ [f] &\mapsto [f(1,0) : f(0,1)]. \end{aligned}$$

Demostración. Un elemento no cero $f : K_\infty^2 \to \mathbb{C}_\infty$ está determinado por sus valores $(f(1,0), f(0,1))$ sobre la base canónica de K_∞^2. Una dilatación de f da lugar a una dilatación de $(f(1,0), f(0,1)) = (x_1, x_2)$. Ahora, $(a_1, a_2) \in \ker(f)$ si y sólo si $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Esto último implica que si $(a_1, a_2) \neq 0$, entonces (x_1, x_2) se encuentra en el hiperplano K_∞-racional con ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$.

Para cada $\omega \in \Omega^2$, fijamos $c, d \in \mathbb{C}_\infty$ tal que $\omega = [c : d]$. Entonces, la inversa de la función ϱ se da como

$$\begin{aligned} \Omega^2 &\to \mathrm{Mon}_{K_\infty}(K_\infty^2, \mathbb{C}_\infty)/\mathbb{C}_\infty^* \\ \omega &\mapsto [f_{(c,d)}], \end{aligned}$$

donde $f_{(c,d)}(a,b) = ca + db$ para toda $(a,b) \in K_\infty^2$. □

Defínase la función,

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathrm{Mon}_{K_\infty}(K_\infty^2, \mathbb{C}_\infty)/\mathbb{C}_\infty^* &\to N(K_\infty^2) \\ [f] &\mapsto [|\bullet|_f], \end{aligned}$$

en donde $|v|_f = |f(v)|$ para toda $v \in K_\infty^2$.

Definición 4.4. La aplicación inmueble $\lambda : \Omega^2 \to \tau$ se define como la composición

$$\lambda = \upsilon \circ \vartheta \circ \varrho.$$

El grupo $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ actúa como un grupo de matrices por la derecha sobre K_∞^2 y por la izquierda sobre $N(K_\infty^2)$. Además, la aplicación inmueble es $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$-equivariante ([7, Capítulo 3]).

4.1.3. Fibras de la aplicación inmueble y estructura rígida del semiplano superior

La aplicación inmueble es especialmente útil para describir la estructura rígida del semiplano superior.

Proposición 4.5 (**Drinfeld** [8, Proposición 6.1])**.** *El espacio Ω^2 es un subconjunto abierto admisible y, en consecuencia, una subvariedad analítica de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$.*

Nota 4.6. La afirmación de la Proposición 4.5 es válida también para Ω^d.

A continuación daremos un esbozo general de la prueba de la Proposición 4.5. Para esto, describiremos una métrica sobre el inmueble de Bruhat-Tits.

Definición 4.7. Para cada $y \in N(K_\infty^2)$, fijamos algún $|\bullet|_y$ tal que $y = [|\bullet|_y]$. La aplicación $\rho : N(K_\infty^2) \times N(K_\infty^2) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida como

$$\begin{aligned} \rho(y_1, y_2) &= \log_{q_\infty}\left(\sup_{v \in K_\infty^2 - \{(0,0)\}} \frac{|v|_{y_1}}{|v|_{y_2}}\right) + \log_{q_\infty}\left(\sup_{v \in K_\infty^2 - \{(0,0)\}} \frac{|v|_{y_2}}{|v|_{y_1}}\right) \\ &= \log_{q_\infty}\left(\sup_{v \in K_\infty^2 - \{(0,0)\}} \frac{|v|_{y_1}}{|v|_{y_2}}\right) - \log_{q_\infty}\left(\inf_{v \in K_\infty^2 - \{(0,0)\}} \frac{|v|_{y_1}}{|v|_{y_2}}\right). \end{aligned}$$

se llama la métrica sobre $N(K_\infty^2)$.

Sea Λ una latiz de K_∞^2. Entonces (ver [15]),

$$\Lambda = \{v \in K_\infty^2 \mid |v|_\Lambda \leq 1\} \qquad \text{y} \qquad \pi\Lambda = \{v \in K_\infty^2 \mid |v|_\Lambda < 1\},$$

en donde $|\bullet|_\Lambda$ es la norma definida en la sección anterior. Entonces, $\Lambda - \pi\Lambda$ es la esfera unitaria tal que $|v|_\Lambda = 1$ para toda $v \in K_\infty^2$. Ya que cada elemento no cero $v \in K_\infty^2$ es proporcional a algún v' con $|v'|_\Lambda = 1$, se deduce que

$$\rho(y,x) = \log_{q_\infty}\left(\sup_{v\in\Lambda-\pi\Lambda} |v|_y\right) - \log_{q_\infty}\left(\inf_{v\in\Lambda-\pi\Lambda} |v|_y\right),$$

en donde $y = [| \bullet |] \in N(K_\infty^2)$ y $x = [| \bullet |_\Lambda]$.

Definimos el *valor absoluto imaginario* de $u \in \mathbb{C}_\infty$ por

$$|u|_{\text{im}} = \inf_{a\in K_\infty}\{|u-a|\}.$$

Proposición 4.8. *Sea $y \in N(K_\infty^2)$ la norma asociada a la latiz estándar Λ contenida en K_∞^2. Entonces, para todo $\omega \in \Omega^2$, se tiene*

$$\rho(\lambda(\omega), y) = \begin{cases} -\log_{q_\infty} |\omega|_{\text{im}}, & |\omega| \leq 1 \\ -\log_{q_\infty} |\omega^{-1}|_{\text{im}}, & |\omega| \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. Sea $(a,b) \in K_\infty^2$ y $\omega \in \Omega^2$. Por definición, la aplicación inmueble $\lambda : \Omega^2 \to \tau$ está dada por

$$\lambda(\omega)(a,b) = |a + \omega b|.$$

Si $|\omega| \leq 1$ entonces $|a+\omega b| \leq \max\{|a|, |\omega||b|\} \leq 1$ para toda $(a,b) \in \Lambda - \pi\Lambda$. También, $(a,b) \in \Lambda - \pi\Lambda$ implica que $\max\{|a|,|b|\} = 1$. Si $|a| < 1$ entonces $|b| = 1$ y por lo tanto $|a+\omega b| = 1$. Por lo tanto $\sup_{(a,b)\in\Lambda-\pi\Lambda} |a+\omega b| = 1$. Además,

$$\inf_{(a,b)\in\Lambda-\pi\Lambda} |a+\omega b| = \inf_{a\in\mathcal{O}_\infty} |a+\omega| = \inf_{a\in K_\infty} |a+\omega| = |\omega|_{\text{im}}.$$

Para el caso $|\omega| \geq 1$ es suficiente observar que

$$\rho(\lambda(\omega), y) = \rho(\lambda(1/\omega), y).$$

Aplicando el caso anterior se logra el resultado. □

Para la aplicación reducción $r : \mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty) \to \mathbf{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_{q_\infty})$ escogemos una sección $s : \mathbf{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_{q_\infty}) \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$ tal que $s(0) = 0$, $s(\infty) = \infty$ y $r \circ s$ es la identidad sobre $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_{q_\infty})$.

Escribimos $B(u,c)$ para denotar a la bola abierta con centro u y radio c en $\mathbb{C}_\infty$, y $B^*(u,c)$ denotará a la correspondiente bola cerrada. Para el punto z en infinito de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$, escribimos

$$B(z,c) = \{z\} \cup \{u \in \mathbb{C}_\infty \mid |u| > 1/c\}.$$

Corolario 4.9. *Sea x un vértice de τ correspondiente a la latiz estándar de $\mathcal{O}_\infty^2$ contenida en K_∞^2. Para $0 \le c < 1$ un número real,*

$$\lambda^{-1}(B^*(x,c)) = \mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty) - \bigcup_{\xi \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_{q_\infty})} B(s(\xi), q_\infty^{-c}).$$

Demostración. Sea $\omega \in \Omega^2$. Supongamos primero que $|\omega| \le 1$. Sea $c \in [0,1)$ un real arbitrario. Por la Proposición 4.8, tenemos que $\omega \in \lambda^{-1}(B^*(x,c))$ si y sólo si $q_\infty^{-1} < q_\infty^{-c} \le |\omega|_{\mathrm{im}} \le 1$. Este es el caso si y sólo si ω no se encuentra en alguno de los $(q_\infty + 1)$ discos $B(s(\xi), q_\infty^{-c})$ para todo $\xi \in \mathbf{P}^1(\mathbb{F}_{q_\infty})$.

El caso $|u| > 1$ se sigue del punto anterior y de la Proposición 4.8 en donde notamos que ω se encuentra en algún disco $B(s(\xi), q_\infty^{-c})$, donde $\xi \in \mathbf{P}^1(\mathbb{F}_{q_\infty})$, si y sólo si $1/\omega$ también se encuentra en algún disco. $\square$

De esta manera, la fibra de la aplicación inmueble de $B^*(x,c)$ es $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$ menos $q_\infty + 1$ discos abiertos disjuntos.

Se sigue de la demostración del Corolario 4.9 que, para $c \in [n, n+1)$ con $n > 0$ un entero,

$$\lambda^{-1}(B^*(x,c)) = \mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty) - \bigcup_{\xi \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_{q_\infty}) \times \mathbb{F}_{q_\infty}^n} B(s(\xi_0) + \cdots + s(\xi_n)\pi^n, q_\infty^{-c}),$$

en donde $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ con $\xi_0 \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_{q_\infty})$ y $\xi_i \in \mathbb{F}_{q_\infty}$ para $1 \le i \le n$. Por lo tanto, para $c \in [n, n+1)$, $\lambda^{-1}(B^*(x,c))$ es $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$ menos $(q_\infty + 1)q_\infty^n$ discos abiertos ajenos.

Fijemos algún ordenamiento de los $(q_\infty+1)q_\infty^n$ elementos de $(\overline{\mathbb{F}}_{q_\infty}) \times \mathbb{F}_{q_\infty}^n$. Definamos, para toda $i \in [1, (q_\infty + 1)q_\infty^n]$,

$$f_i(t, t_i) := \begin{cases} t_i(t - s(\xi_i)) - \pi^{n+1} & |s(\xi_i)| \le 1 \\ t_i(t - s(\xi_i)) - \pi^{n+s(\xi_i)+1} & 1 < |s(\xi_i)| < \infty \\ t_i - \pi^{n+1} t & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, si definimos a la K_∞-álgebra afinoide

$$\mathcal{A} = K_\infty \langle t, t_1, \ldots, t_{(q_\infty+1)q_\infty^n} \rangle / \left(f_1, \ldots, f_{(q_\infty+1)q_\infty^n} \right)$$

se tiene que

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{A}) = \lambda^{-1}(B^*(x,c)).$$

Los subconjuntos afinoides de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$ obtenidos por medio de las fibras de la aplicación inmueble de las bolas cerradas en la realización geométrica del inmueble de Bruhat-Tits, definen una topología de Tate sobre Ω^2 y, por lo tanto, proveen una cubierta admisible. Ya que Ω^2 es unión creciente de tal cubierta se obtiene una estructura rígida sobre Ω^2 definido sobre K_∞.

4.2. Uniformización analítica de variedades de Drinfeld

A continuación daremos una descripción de los módulos de Drinfeld de rango d en términos de latices para así obtener una descripción de los $\mathbb{C}_\infty$-puntos de la variedad de Drinfeld.

Sea Y un A-módulo proyectivo de rango d. Para Y, se tienen encajes e isomorfismos $Y \to K_\infty \otimes_A Y = K_\infty^d$ y $\mathrm{GL}_A(Y) \to \mathrm{GL}_A(K_\infty \otimes_A Y) = \mathrm{GL}_d(K_\infty)$ (véase [7, Capítulo 3]). Denotemos por $\mathrm{Pic}_d(A)$ el conjunto de clases de isomorfismo de A-módulos proyectivos de rango d.

Definición 4.10. Sea Y un A-módulo proyectivo de rango d. Sea $I \subset A$ un ideal no cero. Una I-estructura de nivel para Y, es un isomorfismo de A-módulos

$$\alpha : Y/IY \to (A/I)^d.$$

Sea I un ideal de A; la proyección $Y \to Y/IY$ incluye un morfismo de grupos $\mathrm{GL}_A(Y) \to \mathrm{GL}_A(Y/IY)$ con núcleo $\mathrm{GL}_A(Y, I)$.

Fijemos una estructura de nivel $\alpha_0 : Y/IY \to (A/I)^d$. Se tienen los siguientes dos puntos (ver [7, Capítulo 3]o [17, Proposición 4.6.3]):

1. Cada inyección $f : K_\infty \otimes Y \to \mathbb{C}_\infty$ determina una latiz $f(Y) \in \mathrm{Lat}_A(\mathbb{C}_\infty)$ (ver Capítulo 1 sección 2.3) y una I-estructura de nivel $\alpha = \alpha_0\left((f|_Y)^{-1} \bmod I\right)$ sobre $f(Y)$. Además, todas las A-sublatices de $\mathbb{C}_\infty$ isomorfas a Y, junto con una I-estructura de nivel, provienen de la construcción anterior.

2. Dos inyecciones $f, f' : K_\infty \otimes Y \to \mathbb{C}_\infty$ determinan la misma latiz en $\mathbb{C}_\infty$ si y sólo si existe $h \in \mathrm{GL}_A(Y)$ con $f' = fh$. A su vez, estos determinan la misma latiz en $\mathbb{C}_\infty$ con I-estructura de nivel si y sólo si existe $h \in \mathrm{GL}_A(Y, I)$ con $f' = fh$.

Proposición 4.11. *Sea I un ideal no cero de A. Entonces, se tiene la biyección*

$$\coprod_{(\alpha,Y)\in \mathrm{Pic}_d(A,I)} \mathrm{GL}_A(Y,I)\backslash\Omega^d \xrightarrow{\simeq} M_I^d(\mathbb{C}_\infty),$$

en donde $\mathrm{Pic}_d(A, I)$ es el conjunto de parejas (α, Y) con $\alpha : I^{-1}Y/Y \to (I^{-1}/A)^d$ un isomorfismo y $Y \in \mathrm{Pic}_d(A)$.

Demostración. Recordemos de la sección anterior (Proposición 4.3) que el conjunto de clases de $\mathbb{C}_\infty^*$-homotecias de morfismos K_∞-lineales inyectivas de K_∞^d en $\mathbb{C}_\infty$ se identifica con Ω^d. Por las observaciones anteriores, se tiene una biyección

$$\mathrm{GL}_A(Y)\backslash\Omega^d \to \{\Lambda \in \mathrm{Lat}_A(\mathbb{C}_\infty) \mid \Lambda \cong Y \text{ módulo } \mathbb{C}_\infty - \text{homotecias}\}.$$

Aplicando el Teorema 2.27, se obtiene la biyección

$$\coprod_{Y \in \mathrm{Pic}_d(A)} \mathrm{GL}_A(Y)\backslash\Omega^d \xrightarrow{\cong} M_1^d(\mathbb{C}_\infty),$$

en donde $M_1^d(\mathbb{C}_\infty)$ es el conjunto de clases de isomorfismo de objetos en $\mathrm{Drin}_A(\mathbb{C}_\infty)$.

Sea I un ideal no cero de A y $\alpha : Y/IY \to (A/I)^d$ una I-estructura de nivel. Si $Y = \Lambda \in \mathrm{Lat}_A(\mathbb{C}_\infty)$ y $\phi = \phi^\Lambda \in \mathrm{Drin}_A(\mathbb{C}_\infty)$, entonces se sigue, de la sección 2.3 del Capítulo 1, que $\ker(\phi_a) \cong a^{-1}\Lambda/\Lambda$. En consecuencia,

$$\mathbb{G}_{a,\mathbb{C}_\infty}[I] = I^{-1}\Lambda/\Lambda.$$

Hemos así probado que una I-estructura de nivel para el A-módulo de Drinfeld ϕ^Λ es lo mismo que una I-estructura de nivel para Λ. Finalmente, para obtener el resultado, basta notar que las biyecciones anteriores preservan las I-estructuras de nivel. □

La Proposición 4.11 involucra solamente al campo local en ∞. En lo que sigue, daremos una descripción de $M_I^d(\mathbb{C}_\infty)$ usando a todos los primos de K (descripción adélica).

Sea U un subconjunto abierto de la curva $\mathfrak{X}$ sobre $\mathbb{F}_q$. Sea S un conjunto finito de puntos cerrados de U. Una gavilla $\mathscr{E}$ localmente libre de rango d sobre U está trivializada sobre $U-S$ si existe un isomorfismo de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-módulos

$$\mathscr{E}|_{U-S} \cong \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^d|_{U-S}$$

([22, Ejercicio II.5.18]).

Sea V la localización de $\mathscr{E}$ en el punto genérico de U. La siguiente construcción de una latiz en V se encuentra en [21]. Se tiene que V es un espacio vectorial de dimensión d sobre K. Así, $\mathscr{E}$ define, para todos los puntos cerrados x de U, un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}$-submódulo $L(x)$ de V. Si $\mathscr{E}$ está trivializado sobre $U-S$, entonces existe una base $x_1, \ldots, x_d$ de V tal que, para cada $x \in U-S$, se tiene

$$L(x) = \bigoplus_{i=1}^{d} x_i \mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}.$$

Las latices que se originan, a partir de un haz vectorial, de la descripción anterior, pueden identificarse con ciertos espacios homogéneos como lo muestra el siguiente diagrama conmutativo de biyecciones (loc. cit. [21]):

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_d(K)/\,\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}) & \longrightarrow & \{\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x} - \text{latices en } K^d\}\ . \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}_d(K)/\,\mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}) & \longrightarrow & \{\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x} - \text{latices en } K_x^d\} \end{array}$$

Así, el haz vectorial $\mathscr{E}$ trivializado sobre $U - S$ está determinado por un conjunto finito de latices $L(x) \subset K^d$. Esto conlleva a la siguiente biyección:

$$\prod_{x \in S} \mathrm{GL}_d(K_x)/\,\mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}) \xrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{c} \text{Haces vectoriales sobre } \mathfrak{X} \text{ de} \\ \text{dimensión } d \text{ trivializados sobre} \\ U - S \text{ hasta isomorfismos} \end{array} \right\}.$$

Sean I un ideal de A e $\mathscr{I}$ la correspondiente gavilla de ideales de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Supongamos que $\mathscr{E}$ está equipado con una I-estructura de nivel; esto es, un isomorfismo de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-módulos

$$\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}) \cong (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I})^d\,.$$

Supongamos que el soporte de $\mathrm{Spec}(A/I)$ está contenido en S. Para todo $x \in U$, definamos

$$\mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}, I) = \ker\Big(\mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}) \to \mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}/I\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x})\Big)\,,$$

y

$$K_d(I) = \prod_{x \in \mathfrak{X}} \mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}, I).$$

De esta forma, el diagrama previo se modifica, cuando el soporte de $\mathrm{Spec}(A/I)$ contenido en S, como:

$$\prod_{x \in S} \mathrm{GL}_d(K_x)/\,\mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}, I) \xrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{c} \text{Haces vectoriales sobre } \mathfrak{X} \\ \text{de dimensión } d \\ \text{trivializados sobre } U - S \\ \text{y con } I\text{-estructura} \\ \text{de nivel hasta isomorfismo} \end{array} \right\}.$$

Lema 4.12. *Sea I un ideal de A tal que el soporte de* $\operatorname{Spec}(A/I)$ *está contenido en S. Se tiene la siguiente biyección:*

$$\mathrm{GL}_d(K)\backslash \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_S)/K_d(I) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Vect}_d(\mathfrak{X}, I),$$

en donde

$$\mathbb{A}_S = \mathbb{A}_{K,S} = \varinjlim_S \prod_{x\in S} K_x \times \prod_{x\in \mathfrak{X}-S} \tilde{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}$$

y estamos denotando por $\mathrm{Vect}_d(\mathfrak{X}, I)$ *al conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales de rango d sobre $\mathfrak{X}$ con I-estructura de nivel.*

Demostración. Por definición,

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_S) = \varinjlim_S \prod_{x\in S} \mathrm{GL}_d(K_x) \times \prod_{x\in \mathfrak{X}-S} \mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}).$$

También, se tiene el homeomorfismo de espacios localmente compactos:

$$\prod_{x\in S} \mathrm{GL}_d(K_x) \times \prod_{x\in \mathfrak{X}-S} \mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x})/K_d(I) \to \prod_{x\in S} \mathrm{GL}_d(K_x)/\,\mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}, I).$$

Por lo tanto, considerando haces vetoriales con I-estructura de nivel y trivializaciones sobre algún conjunto abierto $\mathfrak{X} - S$, en donde el soporte de $\operatorname{Spec}(A/I)$ esté contenido en S, obtenemos la biyección

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_S)/K_d(I) \xrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{c} \text{Haces vectoriales sobre } \mathfrak{X} \\ \text{de dimensión } d \\ \text{con trivialización fuera} \\ \text{del soporte de } \operatorname{Spec}(A/I) \\ \text{con } I\text{-estructura de nivel} \\ \text{hasta isomorfismo} \end{array} \right\}.$$

Ya que las distintas trivializaciones están relacionadas por la acción de $\mathrm{GL}_d(K)$ sobre las bases, se tiene el resultado deseado. □

La descripción adélica de los $\mathbb{C}_\infty$-puntos de la variedad de Drinfeld se obtiene cuando $S = \{\infty\}$. Nótese que, en este caso,

$$\mathrm{GL}_d(\hat{A}) \cong \prod_{x\in\mathfrak{X}-\infty} \mathrm{GL}_d(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}).$$

Proposición 4.13. *Sea I un ideal de A. Se tiene una biyección*

$$\mathrm{GL}_d(K)\backslash(\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty) \times \Omega^d(\mathbb{C}_\infty))/U_I \xrightarrow{\cong} M_I^d(\mathbb{C}_\infty),$$

en donde $U_I = \ker(\mathrm{GL}_d(\hat{A}) \to \mathrm{GL}_d(\hat{A}/I\hat{A}))$.

Demostración. Por el teorema de Serre-Swan [35], un haz vectorial sobre la curva afín $\mathfrak{X}-\infty$ de dimensión d, corresponde a un módulo proyectivo Y de rango d sobre A; es decir,

$$\mathrm{Vect}_d(\mathfrak{X}-\infty, I) = \mathrm{Pic}_d(A, I).$$

Note también que $K_d(I) = U_I$. Por el Lema 4.12, se tiene una biyección

$$\begin{aligned} &\mathrm{GL}_d(K)\backslash(\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)/U_I) \times \Omega^d(\mathbb{C}_\infty) \\ &\qquad\qquad \xrightarrow{\cong} \mathrm{Vect}_d(\mathfrak{X}-\infty, I) \times (\mathbb{C}_\infty^* \backslash \mathrm{Mon}(K_\infty^d, \mathbb{C}_\infty)). \end{aligned}$$

La trivialización de Y es una base de $Y \otimes_A K$ sobre K que define un encaje $Y \to K_\infty^d$ como un A-submódulo discreto. Cuando este encaje se compone con un elemento de $\mathrm{Mon}(K_\infty^d, \mathbb{C}_\infty)$, produce un elemento en $\mathrm{Lat}_A(\mathbb{C}_\infty)$, junto con una I-estructura de nivel módulo dilataciones en $\mathbb{C}_\infty^*$. Por lo tanto, usando la Proposición 4.11, se obtiene la descripción de $M_I^d(\mathbb{C}_\infty)$. □

El siguiente resultado afirma que, de hecho, la biyección de la Proposición 4.13 proviene de un isomorfismo de espacios analíticos rígidos.

Proposición 4.14 ([8, Proposición 6.6])**.** *Sea $I \subset A$ un ideal no cero tal que $V(I)$ contiene más de un elemento. Entonces existe un isomorfismo de espacios analíticos rígidos*

$$\mathrm{GL}_d(K)\backslash(\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty) \times \Omega^d)/U_I = (M_I^d \otimes K_\infty)^{\mathrm{an}} = (M_I^d(\mathbb{C}_\infty))^{\mathrm{an}}.$$

Además, la identificación es consistente con la proyección

$$(M_J^d \otimes K_\infty)^{\mathrm{an}} \to (M_I^d \otimes K_\infty)^{\mathrm{an}}$$

para $J \subset I$, y también con la acción del grupo $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)$.

Definición 4.15. Un subgrupo aritmético H de $\mathrm{GL}_d(\hat{A})$ es un subgrupo compacto abierto que contiene a un subgrupo compacto abierto de la forma U_I para algún ideal I no cero de A.

Las descripciones del esquema $M_I^d(\mathbb{C}_\infty)$ se generalizan a cualquier subgrupo aritmético.

Teorema 4.16 (Uniformización de Drinfeld). *Sea $H \subset \mathrm{GL}_d(A)$ un subgrupo compacto abierto. Entonces, el isomorfismo de espacios analíticos rígidos de la Proposición 4.14 induce biyecciones*

$$M_H^d(\mathbb{C}_\infty) = \coprod_{gH \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)/H} (gHg^{-1} \cap \mathrm{GL}_d(K))\backslash\Omega^d(\mathbb{C}_\infty).$$

5. Cohomología étale rígida del espacio modular

El objetivo de ésta sección es calcular la cohomología rígida de la variedad de Drinfeld M_I^2. Tal objetivo se logra describiendo la cohomología rígida del semiplano superior de Drinfeld en términos de cocadenas cocerradas sobre el inmueble de Bruhat-Tits.

5.1. Generalidades sobre cohomología de espacios analíticos rígidos

En [8], Drinfeld define por vez primera la cohomología étale de espacios analíticos rígidos, aunque solamente para las gavillas $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y μ_n. La cohomología rígida cuenta ahora con un mejor desarrollo gracias a los trabajos de autores como V. Berkovich [1] y R.Huber [23]. Sin embargo, presentaremos la definición original de Drinfeld.

Sea X un espacio analítico rígido sobre un campo L completo con respecto a un valor absoluto (no trivial) no arquimediano. Fijemos, de antemano, una cerradura separable para L que denotaremos por L^{sep}. Los siguientes grupos de cohomología étale se definen en términos de secciones globales de gavillas analíticas rígidas, donde $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es la gavilla constante y μ_n es la gavilla de n-ésimas raíces de la unidad sobre X,

$$H^0_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) := H^0_{\text{rig}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad H^0_{\text{ét}}(X, \mu_n) := H^0_{\text{rig}}(X, \mu_n).$$

El grupo $H^1_{\text{ét}}(X, \mu_n)$ se define como el grupo (bajo producto tensorial) de parejas $(\mathscr{L}, \varphi)$, hasta isomorfismos, en donde $\mathscr{L}$ es una gavilla invertible sobre X y φ es un isomorfismo $\varphi : \mathscr{O}_X \simeq \mathscr{L}^{\otimes n}$. El grupo $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ está definido por la ecuación

$$H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H^1_{\text{ét}}(X, \mu_n) \otimes \mu_n(-1),$$

en donde $\mu_n(-1)$ es el $\mathrm{Gal}(L^{sep}/L)$-módulo $\mathrm{Hom}(\mu_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Los grupos de cohomología $H^i_{\text{rig}}(X \otimes_L L^{sep}, \mathscr{M})$, para $i = 0, 1$ y $\mathscr{M} \in \{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mu_n\}$, están definidos por la ecuación

$$H^i_{\text{rig}}(X \otimes_L L^{sep}, \mathscr{M}) = \varinjlim H^i_{\text{rig}}(X \otimes_L F, \mathscr{M})$$

donde F corre sobre todas las extensiones de campos finitas separables de L contenidas en L^{sep}.

Proposición 5.1 ([8, §10]). *Se tienen las siguientes propiedades para los grupos de cohomología rígida:*

1. *Si* $X = Y^{\mathrm{an}}$*, para* Y *un esquema proyectivo sobre* L*, entonces*

$$H^i_{\mathrm{rig}}(Y \otimes_L L^{sep}) = H^i_{\mathrm{rig}}(X \otimes_L L^{sep}),$$

para $i = 0, 1$ *y coeficientes* μ_n *y* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*.*

2. *Si* $f : X \to Y$ *es un morfismo étale finito de espacios analíticos rígidos (ver [11, Capítulo 8]) con grupo de Galois* G*, de orden primo a* n*, entonces*

$$H^1_{\mathrm{rig}}(Y, \mu_n) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X, \mu_n)^G$$

es un isomorfismo.

3. *Se tiene una sucesión exacta*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_{\mathrm{rig}}(\mu_n) \to H^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}^*_X) \xrightarrow{n} H^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}^*_X) \\ \to H^1_{\mathrm{rig}}(\mu_n) \to H^1_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}^*_X) \xrightarrow{n} H^1_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}^*_X). \end{aligned}$$

4. *Sea* $\{X_i\}_{i \in I}$ *una cubierta abierta admisible de un espacio analítico rígido* X *cuyo nervio tiene dimensión no más grande que uno. Entonces, existe una sucesión exacta*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mu_n) \to \prod_i H^0_{\mathrm{rig}}(X_i, \mu_n) \to \prod_{i \neq j} H^0_{\mathrm{rig}}(X_i \cap X_j, \mu_n) \\ \to H^1_{\mathrm{rig}}(X, \mu_n) \to \prod_i H^1_{\mathrm{rig}}(X_i, \mu_n) \to \prod_{i \neq j} H^1_{\mathrm{rig}}(X_i \cap X_j, \mu_n). \end{aligned}$$

5.2. Cohomología del semiplano superior de Drinfeld

El primer paso para el cálculo de la cohomología de $\Omega^2(\mathbb{C}_\infty)$ consiste calcular la cohomología de dominios racionales en $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$. Este es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 5.2. *Sean* $D_0, \ldots, D_m$ *discos abiertos y ajenos por parejas en* $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$ *de radio está en* $q_\infty^{\mathbb{Q}}$*. Sea* n *un entero primo a la característica del campo* K_∞*. Entonces el espacio analítico rígido*

$$X = \mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty) - \bigcup_{i=0}^m D_i$$

tiene cohomología dada por

(*a*) $H^0_{\mathrm{rig}}(X \otimes_{K_\infty} K_\infty^{sep}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *(es decir que X es conexo);*

(*b*) $H^1_{\mathrm{rig}}(X \otimes_{K_\infty} K_\infty^{sep}, \mu_n) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m$.

Demostración. (*a*) Ya que $\mathrm{Max}(K_\infty\langle t\rangle) = \{t : |t| < 1\}$ es conexo (ver Capítulo 2), entonces cada disco abierto en $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$ es conexo. Ya que $X \cup D_1 \cup \cdots \cup D_m = \mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty) - D_0$ es un disco (y por tanto conexo) y ya que las fronteras de D_i son conexos, se sigue que X es conexo. Esto prueba el primer punto de la proposición.

(*b*) Ya que cada divisor de X es principal, entonces $H^1_{\mathrm{rig}}(X, \mathscr{O}_X^*) = 0$. El conjunto de funciones racionales sin polos sobre X es denso en todas partes en $H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mathscr{O}_X)$. Si $f \in H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mathscr{O}_X)$ y $\sup_{x\in X} |f(x) - 1| < 1$ entonces $f = g^n$ para alguna $g \in H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mathscr{O}_X)$. Por lo tanto, cada elemento de $H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mathscr{O}_X^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ puede representarse por una función racional. Además, el homomorfismo natural

$$H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mathscr{O}_X^*) \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to H^1_{\mathrm{rig}}(X, \mu_n)$$

es sobreyectivo debido al tercer punto de la Proposición 5.1. Si f es una función racional sobre $\mathbf{P}^1/K_\infty$ cuyo divisor en $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$ está contenido en precisamente uno de los discos D_i entonces existe $c \in K_\infty$ tal que $\sup_{x\in X} |cf(x)-1| < 1$; por lo tanto $cf = g^n$ para algún $g \in H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mathscr{O}_X)$. De esta manera obtenemos un homomorfismo sobreyectivo

$$\phi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m \to H^1_{\mathrm{rig}}(X, \mu_n)/[K_\infty^*/(K_\infty^*)^n].$$

Sea $B = \mathrm{Max}(K_\infty\langle t, t^{-1}\rangle)$. Entonces B es un círculo de radio 1 dado por $|t| = 1$. Sea j un entero tal que n no divide a j y sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de $\mathcal{O}_\infty$. Si t^j fuera una potencia en $K_\infty\langle t, t^{-1}\rangle$, entonces $t^j = f^n$ en donde $||f|| = 1$ y $||\bullet||$ es la norma sobre $K_\infty\langle t, t^{-1}\rangle$; entonces se tendría que t^j(módulo $\mathfrak{m}$) sería una potencia en $\kappa(\infty)[t, t^{-1}]$, en donde $\kappa(\infty)$ es el campo residual de ∞, que no es el caso. Se sigue entonces que

$$H^1_{\mathrm{rig}}(B, \mu_n)/[K_\infty^*/(K_\infty^*)^n] \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Sea S_i la frontera de D_i para toda i. Entonces S_i es un círculo de cierto radio, digamos que de radio $c_i \in q_\infty^{\mathbb{Q}}$. Obtenemos el isomorfismo

$$H^1_{\mathrm{rig}}(S_i, \mu_n)/[K_\infty^*/(K_\infty^*)^n] \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Se sigue que el homomorfismo ϕ es un isomorfismo y obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to K_\infty/(K_\infty^*)^n \to H^1_{\mathrm{rig}}(X, \mu_n) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m \to 0.$$

Pasando a una cerradura separable se concluye la prueba. $\square$

En seguida se describe la cohomología de Ω^2. Para esto, necesitamos de una definición.

Definición 5.3. Sea N un grupo abeliano y sea τ una gráfica. Sea E el conjunto de aristas orientadas de τ. La arista con orientación opuesta a una arista $e \in E$ se denota $e^* \in E$. El *grupo de* 1*-cocadenas* $C^1(\tau, N)$ es el subgrupo de $\prod_e N$ de elementos c tales que $c(e^*) = -c(e)$. El grupo de cocadenas armónicas $\mathcal{H}^1(\tau, N)$ es el subgrupo que consiste de elementos $c \in C^1(\tau, N)$ tales que la suma de los valores de la cocadena c sobre todas las aristas que emanan de un solo vértice es igual a 0 y donde esto se cumple para cada vértice de τ.

Proposición 5.4 ([8, Proposición 10.2])**.** *La aplicación inmueble,* $\lambda : \Omega^2 \to \tau$*, induce los siguientes isomorfismos compatibles con la acción de* $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$*:*

1. $H^0_{\mathrm{rig}}(\Omega^2 \otimes_{K_\infty} K_\infty^{sep}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
2. $H^1_{\mathrm{rig}}(\Omega^2 \otimes_{K_\infty} K_\infty^{sep}, \mu_n) \cong \mathcal{H}^1(\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

El grupo $\mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$ *actúa trivialmente sobre ambos grupos.*

Demostración. Defínase una cubierta afín admisible $\Omega^2 = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ de Ω^2 en donde I es el conjunto de vértices y aristas (los simplejos) del árbol τ como sigue. Si i es un vértice x, entonces

$$\Omega_i = \lambda^{-1}(B^*(x, 1/3))$$

y si i es una arista e entonces

$$\Omega_i = \lambda^{-1}\left(e - \bigcup_x B(x, 1/4)\right)$$

en donde la unión es sobre todos los vértices de τ. El nervio de esta cubierta tiene vértices I y es la primer subdivisión baricéntrica del complejo simplicial τ. Además, esta cubierta en invariante con respecto a $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$.

Tenemos, por el Corolario 4.9, que si i es un vértice entonces Ω_i es $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$ menos $(q_\infty + 1)$ discos cerrados y si i es una arista entonces Ω_i es $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$ menos dos discos cerrados ajenos. Además, si i es un vértice y j es una arista que emana de i entonces $\Omega_i \cap \Omega_j$ es $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}_\infty)$ menos dos discos cerrados ajenos. Ya que $\Omega_i \cap \Omega_j$ es geométricamente conexo y

τ es un árbol conexo, se sigue que Ω^2 es geométricamente conexo. Esto prueba el primer isomorfismo.

Sea E el subconjunto de I de elementos $i \in I$ que corresponden a las aristas. Escojamos orientaciones para cada $i \in E$ e isomorfismos para cada $i \in E$ (Proposición 5.2) $H^1_{\text{rig}}(\Omega_i, \mu_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si i es un vértice entonces, por la Proposición 5.2, $H^1_{\text{rig}}(\Omega_i, \mu_n) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{q_\infty}$. Además, para toda $i \neq j$, $H^1_{\text{rig}}(\Omega_i \cap \Omega_j, \mu_n) \cong 0$ a menos que i sea un vértice y j una arista que emana de i (o viceversa); en el último caso $H^1_{\text{rig}}(\Omega_i \cap \Omega_j) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ por la Proposición 5.2. Por el punto 4 de la Proposición 5.1, tenemos que la composición

$$H^1_{\text{rig}}(X, \mu_n) \to \prod_{i\in I} H_{\text{rig}}(\Omega_i, \mu_n) \to \prod_{i\in E} H^1_{\text{rig}}(\Omega_i, \mu_n) \cong \prod_{i\in E} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

provee un isomorfismo $H^1_{\text{rig}}(\Omega^2, \mu_n) \to \mathcal{H}(\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Es inyectivo por el punto 4 de la Proposición 5.1, y el conjunto imagen corresponde exactamente a aquellas funciones en $\prod_{i\in E} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, que se extienden a ser alternantes sobre todas las aristas ordenadas. $\square$

5.3. Cohomología de la variedad de Drinfeld M_I^2

Consideremos un subgrupo de congruencia $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2(\tilde{A})$ del ideal $I \subset A$, que actúe sobre la realización geométrica del inmueble de Bruhat-Tits τ. En toda esta sección, supondremos que el estabilizador en $\Gamma_g = g\Gamma g^{-1} \cap \mathrm{GL}_2(K)$ de cualquier vértice o arista de τ es un p-grupo. En primer lugar, debemos calcular la cohomología de $\Gamma\backslash\Omega^2(\mathbb{C}_\infty)$ usando la aplicación inmueble módulo Γ. Recordemos que $\Gamma\backslash\Omega^2$ hereda, a partir de Ω^2, una estructura de espacio analítico rígido (Proposición 4.14).

Proposición 5.5. *La aplicación inmueble módulo* Γ, $\lambda_\Gamma : \Gamma\backslash\Omega^2 \to \Gamma\backslash\tau$, *induce la siguiente sucesión exacta corta:*

$$0 \to H^1_{\text{rig}}(\Gamma) \to H^1_{\text{rig}}(\Gamma\backslash\Omega^2) \to \mathcal{H}^1(\tau)^\Gamma \otimes \mu_n(-1) \to 0.$$

Demostración. A continuación indicamos algunos pasos sobresalientes de la prueba refiriendo al lector a [7, Capítulo 4] para los detalles. Sea n un entero primo a la característica p de K_∞.

La sucesión espectral de Leray de la aplicación inmueble λ_{Γ_g} es la sucesión espectral del espacio cubriente cuya sucesión exacta de términos de grado bajo da la sucesión exacta

$$0 \to H^1_{\text{rig}}(\Gamma_g\backslash\tau) \to H^1_{\text{rig}}(\Gamma_g\backslash\Omega^2) \to H^1_{\text{rig}}(\Omega^2)^{\Gamma_g} \to H^2_{\text{ét}}(\Gamma_g\backslash\tau)$$

Como Γ_g actúa sobre τ con subgrupos estabilizadores de aristas y vértices que son p-grupos, los grupos $H^*(\Gamma_g\backslash\tau)$ son los grupos de cohomología del grupo discreto Γ_g con coeficientes en μ_n o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Como τ es un árbol se tiene, por un resultado de Serre [33], que $H^2(\Gamma_g) = 0$.

Debido a la Proposición 5.4, $H^1_{\mathrm{rig}}(\Omega^2)^{\Gamma_g}$ es isomorfo a $\mathcal{H}^1(\Gamma_g\backslash\tau)^{\Gamma_g}$. Usando el segundo punto de la Proposición 5.1 se deduce el resultado. □

Corolario 5.6. *La aplicación inmueble módulo* Γ*,* $\lambda_\Gamma : \Gamma\backslash\Omega^2 \to \Gamma\backslash\tau$*, induce la sucesión exacta corta*

$$\begin{aligned}0 \to H^1_{\mathrm{rig}}(\Gamma\backslash\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\to H^1_{\mathrm{rig}}(M_I^2 \otimes K_\infty^{sep}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\\ &\to \mathcal{H}^1(\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\Gamma \otimes \mu_n(-1) \to 0.\end{aligned}$$

Demostración. El resultado se sigue tomando coeficientes en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en la Proposición 5.5 junto con la descripción de la Proposición 4.14. □

Para obtener una cohomología útil, es necesario analizar comportamientos en una compactificación de $\Gamma\backslash\Omega^2(\mathbb{C}_\infty)$ o de $M_I^2(\mathbb{C}_\infty)$.

Definición 5.7. (Cohomologías cuspidales).

1. La cohomología cuspidal

$$\mathcal{H}^1_!(\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\Gamma$$

   es el subgrupo de $\mathcal{H}^1(\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\Gamma$ de cocadenas armónicas invariantes con respecto a Γ que tienen soporte compacto módulo Γ.

2. La cohomología cuspidal rígida $H^1_{\mathrm{rig}!}(M_I^2 \otimes K_\infty^{sep}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ se define por medio de la sucesión exacta de la Proposición 5.5 como el subgrupo de $H^1_{\mathrm{rig}}(M_H^2 \otimes K_\infty^{sep}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ de clases con imagen en $\mathcal{H}_!(\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\Gamma \otimes \mu_n(-1)$, es decir cocadenas cocerradas invariantes bajo Ω con soporte compacto módulo Γ.

La sucesión exacta de la Proposición 5.5, restringida a la cohomología cuspidal, provee la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{aligned}0 \to H^1_{\mathrm{rig}}(\Gamma\backslash\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\to H^1_{\mathrm{rig}!}(M_I^2 \otimes K_\infty^{sep}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\\ &\to \mathcal{H}^1_!(\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\Gamma \otimes \mu_n(-1) \to 0.\end{aligned}$$

Sea I_0 el subgrupo de inercia de $\mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$. En la sucesión exacta de la Proposición 5.5, I_0 actúa trivialmente sobre $H^1_{\mathrm{rig}}(\Gamma\backslash\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ y sobre $\mathcal{H}^1(\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\Gamma \otimes \mu_n(-1)$. Se sigue que $(\sigma, x) \mapsto \sigma x - x$ define una aplicación

$$I_0 \times H^1_{\mathrm{rig}}(M_I^2 \otimes K_\infty^{sep}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1_{\mathrm{rig}}(\Gamma\backslash\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

que es bilineal e invariante bajo $\mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$. El grupo (I_0/I_0^n) se identifica con μ_n como $\mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$-módulos. Por lo tanto, $\mu_n \times H^1_{\mathrm{rig}}(\Gamma\backslash\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subset \ker((\sigma, x) \mapsto \sigma x - x)$ y se obtiene un homomorfismo

$$f_n : \mathcal{H}^1_!(\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\Gamma \to H^1_{\mathrm{rig}}(\Gamma\backslash\tau, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

que asocia, a cada cocadena armónica invariante bajo Γ sobre τ, la clase de cohomología de la correspondiente cocadena sobre $\Gamma\backslash\tau$. Además, si ℓ es un número primo distinto a la característica de K, entonces (véase [7, Capítulo 4, Proposición 4.3])

$$\varinjlim f_{\ell^i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell : \mathcal{H}^1_!(\tau, \mathbb{Z}_\ell)^\Gamma \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^1_{\mathrm{rig}}(\Gamma\backslash\tau, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

es un isomorfismo, en donde $\mathbb{Z}_\ell = \varprojlim \mathbb{Z}/\ell^i\mathbb{Z}$ es el anillo de los enteros ℓ-ádicos y $\mathbb{Q}_\ell = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_\ell)$ es el campo de los números ℓ-ádicos.

5.4. Representación de Galois especial y el teorema de comparación de Drinfeld

En esta sección, se obtendrá la cohomología rígida cuspidal de la variedad de Drinfeld en términos de la cohomología cuspidal de la realización de Bruhat-Tits τ y de la representación de Galois especial. Las definiciones y los resultados que se presentan en esta sección, pueden consultarse en [34].

Sean $K_\infty \subset K_\infty^{\mathrm{nr}} \subset K_\infty^{sep}$ extensiones de campos, K_∞^{sep} una cerradura separable y K_∞^{nr} la extensión máxima no ramificada. Sea $\mathbb{F}_{q_\infty}$ el campo residual de K_∞.

Todas las extensiones algebraicas y separables de K_∞, se supondrán como subcampos de K_∞^{sep}. Una cerradura algebraica $\mathbb{F}_{q_\infty}^{alg}$ de $\mathbb{F}_{q_\infty}$ es el campo de residuos de K_∞^{nr}. Se tiene

$$\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{nr}}/K_\infty) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q_\infty}^{alg}/\mathbb{F}_{q_\infty}) \simeq \hat{\mathbb{Z}},$$

en donde $\hat{\mathbb{Z}}$ es la completación profinita de $\mathbb{Z}$. El grupo $\hat{\mathbb{Z}}$ admite a 1 como generador topológico que corresponde al automorfismo de Frobenius $x \mapsto x^{q_\infty}$ de $\mathbb{F}_{q_\infty}^{alg}$. Denotemos por F a su imagen en $\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{nr}}/K_\infty)$.

Así, F se levanta al automorfismo de Frobenius de $\mathbb{F}_{q_\infty}^{alg}/\mathbb{F}_{q_\infty}$ y F es un generador topológico de $\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{nr}}/K_\infty)$ (para la topología profinita).

Sea ϖ un uniformizante de K_∞. Sean $n > 1$ un entero primo a p y $\varpi^{1/n}$ una n-ésima raíz de ϖ. La extensión $K_\infty^{\mathrm{nr}}(\varpi^{1/n})/K_\infty$ es de Galois. El grupo de Galois es topológicamente generado por dos elementos F y u donde $F|_{K_\infty^{\mathrm{nr}}}$ es el Frobenius descrito anteriormente y u está definido por la existencia de una n-ésima raíz de la unidad primitiva ζ_n tal que $u(\varpi^{1/n}) = \zeta_n \varpi^{1/n}$ es trivial sobre K_∞^{nr}. Las únicas relaciones entre F y u son $FuF^{-1} = u^{q_\infty}$ y $u^n = \mathrm{Id}$. De aquí obtenemos una *representación de Galois*

$$r_n : \mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty) \to \mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{nr}}(\varpi^{1/n})/K_\infty) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

en donde la primera flecha es la restricción y la segunda flecha está definida por

$$F \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_\infty^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $U^{(n)}$ el espacio $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ junto con la acción del grupo de Galois. Sea $\ell \neq p$ un número primo. Sea $U^{(\ell^\infty)}$ el límite proyectivo de representaciones $U^{(\ell^n)}$. Tal espacio es una representación del grupo $\mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$ que puede definirse de la siguiente manera: para todo entero $n > 0$, sea ϖ^{1/ℓ^n} una raíz ℓ^n-ésima de ϖ con la condición de que $(\varpi^{1/\ell^{n+1}})^\ell = \varpi^{1/\ell^n}$ y de igual forma ζ_{ℓ^n} es una raíz ℓ^n-ésima primitiva de la unidad que verifica $(\zeta_{\ell^{n+1}})^\ell = \zeta_{\ell^n}$. Si $E_\ell = K_\infty^{\mathrm{nr}}(\varpi^{1/\ell^n}, n > 1)$ entonces E_ℓ es una extensión de Galois de K_∞ y $\mathrm{Gal}(E_\ell/K_\infty) \simeq \hat{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Z}$ como lo muestra la siguiente sucesión exacta

$$1 \to \mathrm{Gal}(E_\ell/K_\infty^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{Gal}(E_\ell/K_\infty) \to \mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{nr}}/K_\infty) \to 1,$$

$\mathrm{Gal}(E_\ell/K_\infty)$ es topológicamente generado por F y u, donde $F|_{K_\infty^{\mathrm{nr}}}$ es la aplicación definida con anterioridad y u se caracteriza por $u|_{K_\infty^{\mathrm{nr}}} = \mathrm{Id}$ y $u(\varpi^{1/\ell^n}) = \zeta_{\ell^n}\varpi^{1/\ell^n}$ para toda n, la única relación que verifican estos generadores es $FuF^{-1} = u^{q_\infty}$.

Definición 5.8 (**Representación de Galois especial**)**.** La representación especial $\mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}}$ del grupo de Galois $\mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$ es la representación 2-dimensional

$$r_\ell : \mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty) \to \mathrm{Gal}(E_\ell/K_\infty) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell),$$

en donde la primer flecha es la restricción y la segunda está definida por

$$F \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_\infty^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La representación $\mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}}$ tiene una subrepresentación 1-dimensional invariante y es la única representación, hasta isomorfismos, de

$$\mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$$

para la cual existe una sucesión exacta no escindida

$$0 \to \mathbb{Q}_\ell \to \mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}} \to \mathbb{Q}_\ell(-1) \to 0.$$

Teorema 5.9 (**Teorema de comparación de Drinfeld** [8, Proposición 10.3])**.** *Bajo las hipótesis de la sección anterior, se tiene un isomorfismo de* $\mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$*-módulos*

$$H^1_{\mathrm{rig}!}(M_I^2 \otimes K_\infty^{sep}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathcal{H}^1_!(\tau, \mathbb{Q}_\ell)^\Gamma \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}},$$

en donde $H^1_{\mathrm{rig}!}(M_I^2 \otimes K_\infty^{sep}, \mathbb{Q}_\ell) := \varprojlim H^1_{\mathrm{rig}!}(M_I^2 \otimes K_\infty^{sep}, \mathbb{Z}/\ell^i) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$*.*

Demostración. De la sección anterior, existe un isomorfismo

$$\mathcal{H}^1_!(\tau, \mathbb{Q}_\ell)^\Gamma \simeq H^1_{\mathrm{rig}}(\Gamma\backslash\tau, \mathbb{Q}_\ell).$$

Por lo tanto, obtenemos una sucesión exacta no escindida de módulos sobre $\mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$

$$0 \to \mathcal{H}^1_!(\tau, \mathbb{Q}_\ell)^\Gamma \to H^1_{\mathrm{rig}!}(M_I^2 \otimes K_\infty^{sep}, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathcal{H}^1_!(\tau, \mathbb{Q}_\ell)^\Gamma \otimes \mathbb{Q}_\ell(-1) \to 0.$$

El resultado se sigue inmediatamente. $\square$

6. Cocadenas armónicas y formas automorfas

En ésta sección, se calculará la cohomología límite

$$\mathbf{H} := \varinjlim H^1_{\mathrm{rig}!}(M_H^2 \otimes K_\infty^{sep}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

en términos que involucren a la representación especial y al espacio de formas automorfas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$.

6.1. Cocadenas armónicas y la representación especial

Sea τ la realización del inmueble de Bruhat-Tits. Para cualquier $z \in \mathbf{P}^1(K_\infty)$, considerado como un subespacio 1-dimensional de K_∞^2, sea $\gamma_z : K_\infty^2 \to K_\infty^2/z$. Si Λ es una latiz de K_∞^2 entonces $\gamma_z(\Lambda)$ es también una latiz en K_∞^2/z. Para una arista orientada e de τ representada por una pareja de $\mathcal{O}_\infty$-látices $\Lambda_1 \supset \Lambda_2$, sea $P(e)$ el subconjunto de puntos $z \in \mathbf{P}^1(K_\infty)$ tales que $\gamma_z(\Lambda_2) = \gamma_z(\Lambda_1)$. La arista opuesta e^* está representada por $\Lambda_2 \supset \pi\Lambda_1$. Entonces tenemos las inclusiones de látices en el K_∞-espacio vectorial K_∞^2/z

$$\pi\gamma_z(\Lambda_1) \subset \gamma_z(\Lambda_2) \subset \gamma_z(\Lambda_1).$$

Se sigue que $\gamma_z(\pi\Lambda_1) = \gamma_z(\Lambda_2)$ o que $\gamma_z(\Lambda_2) = \gamma_z(\Lambda_1)$. En particular, se tiene la partición de la línea proyectiva

$$\mathbf{P}^1(K_\infty) = P(e) \cup P(e^*).$$

Los elementos de $\mathbf{P}^1(K_\infty)$ pueden identificarse con los finales del árbol τ [32].

Lema 6.1. *Sea R un anillo. Denotemos por* $\mathrm{Med}(\mathbf{P}^1(K_\infty), R)$ *al conjunto de medidas R-valuadas sobre $\mathbf{P}^1(K_\infty)$. La aplicación,*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\tau, R) &\to \mathrm{Med}(\mathbf{P}^1(K_\infty), R) \\ c &\to \mu_c, \end{aligned}$$

definida por $\mu_c(P(e)) = c(e)$, induce un isomorfismo

$$\mathcal{H}^1(\tau, R) \simeq \mathrm{Med}_0(\mathbf{P}^1(K_\infty), R)$$

del conjunto de cocadenas de τ con valores en R al conjunto de medidas con valores en R sobre $\mathbf{P}^1(K_\infty)$ con masa total cero.

Demostración. Sean $e_1, \ldots, e_s$ aristas ordenadas que emanan desde un vértice. Debido a la condición armónica $c(e_1^*) = \sum_{i=2}^s c(e_i)$ se obtiene la ecuación

$$\mu_c(P(e_1^*)) = \sum_{i=2}^{s} \mu_c(P(e_i)).$$

Se sigue que μ_c es finitamente aditiva sobre el conjunto de subconjuntos abiertos compactos de $\mathbf{P}^1(K_\infty)$. La partición de la línea proyectiva se obtiene que $\mu_c(\mathbf{P}^1(K_\infty)) = 0$. La inversa de $c \mapsto \mu_c$ se da como $c_\mu(e) = \mu(P(e))$. La condición armónica para la cocadena c_μ se sigue de la aditividad finita de μ y que $\mu(\mathbf{P}^1(K_\infty)) = 0$. □

Denotemos por $C^\infty(\mathbf{P}^1(K_\infty), R)$ al espacio de funciones localmente constantes sobre $\mathbf{P}^1(K_\infty)$ con valores en R.

Definición 6.2 (**Representación especial**)**.** Sea R un anillo. Entonces, la *representación especial* $V_{\mathrm{sp}}(R)$ de $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ con valores en R es el módulo

$$V_{\mathrm{sp}}(R) = C^\infty(\mathbf{P}^1(K_\infty), R)/R.$$

Esto es, $V_{\mathrm{sp}}(R)$ es la representación de $G(K_\infty)$ sobre el espacio de funciones localmente constantes $\mathbf{P}^1(K_\infty) \to R$ factorizadas por las funciones constantes R.

El espacio V_{sp} está dotado de una acción de $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$:

$$(gf)(x) = f(g^{-1}z)$$

para $f \in C^\infty(\mathbf{P}^1(K_\infty), R)$, $z \in \mathbf{P}^1(K_\infty)$ y $g \in \mathrm{GL}_2(K_\infty)$.

Proposición 6.3. *La aplicación del Lema 6.1 induce un isomorfismo*

$$\mathcal{H}^1(\tau, R) \cong \mathrm{Hom}_R(V_{\mathrm{sp}}(R), R).$$

Demostración. Sea $f \in C^\infty(\mathbf{P}^1(K_\infty), R)$ cualquier función localmente constante. Entonces, podemos integrar con respecto a una medida μ_c y obtener un elemento en R. Como la medida tiene masa total cero, la aplicación (biyectiva) que manda f a su integral con respecto a la medida μ_c produce un elemento en $\mathrm{Hom}_R(V_{\mathrm{sp}}(R), R)$. $\square$

Para $f \in V_{\mathrm{sp}}(R)$, la aplicación del Lema 6.1 induce el isomorfismo,

$$\mathrm{Hom}_R(V_{\mathrm{sp}}(R), R) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)}(V_{\mathrm{sp}}(R), C^\infty(\mathrm{GL}_2(K_\infty), R))$$

dado por

$$\{\psi : f \mapsto \psi(f)\} \mapsto \{f \mapsto \psi(f)(\mathrm{Id}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)})\}.$$

Sea Γ un subgrupo aritmético de $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$. Entonces, Γ actúa sobre el espacio $\mathbf{P}^1(K_\infty)$ y también sobre la representación V_{sp}. Por lo tanto, los isomorfismos anteriores se restringen a isomorfismo de subgrupos Γ-invariantes

$$\mathcal{H}^1(\tau, R)^\Gamma \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)}(V_{\mathrm{sp}}(R), C^\infty(\mathrm{GL}_2(K_\infty)/\Gamma, R)).$$

Supongamos que Γ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(A)$ de índice finito. Sea f una función localmente constante sobre $\mathrm{GL}_2(K_\infty)/\Gamma$. Para cada subgrupo parabólico P de $\mathrm{GL}_2(K)$ con radical unipotente U, sea

$$f_P(x) = \int_{U/(\Gamma\cap U)} f(xu)du.$$

Definición 6.4. Una función localmente constante f sobre $\mathrm{GL}_2(K_\infty)/\Gamma$ es *cuspidal* si $f_P(x) = 0$ para todo subgrupo parabólico P de $\mathrm{GL}_2(K)$. Escribiremos $L_0(\mathrm{GL}_2(K_\infty)/\Gamma, R)$ para denotar al subespacio de elementos cuspidales de $C^\infty(\mathrm{GL}_2(K_\infty)/\Gamma, R)$.

Proposición 6.5. *Si* $\mathcal{H}^1_!(\tau, R)^\Gamma$ *denota al grupo de cocadenas armónicas que son* Γ*-invariantes y que tienen soporte compacto módulo* Γ*, entonces existe un isomorfismo*

$$\mathcal{H}^1_!(\tau, R)^\Gamma \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)}(V_{\mathrm{sp}}(R), L_0(\mathrm{GL}_2(K_\infty)/\Gamma, R)).$$

Demostración. Si $f \in C^\infty(\mathrm{GL}_2(K_\infty)/\Gamma, R)$ es la imagen de un elemento de $V_{\mathrm{sp}}(R)$ por un elemento en

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)}(V_{\mathrm{sp}}(R), C^\infty(\mathrm{GL}_2(K_\infty)/\Gamma, R)),$$

entonces la función f es cuspidal si, y solamente si, tiene soporte compacto módulo Γ y $Z(K_\infty)$ (véase [20]). De esto se deduce el resultado. □

6.2. Formas automorfas y cohomología límite

Recordemos del Teorema 4.13 que se tiene una descripción adélica de los $\mathbb{C}_\infty$-puntos $M^d_H(\mathbb{C}_\infty)$ para subgrupos compactos abiertos $H \subset \mathrm{GL}_2(\hat{A})$. En lo que sigue, relacionamos las formas automorfas valuadas sobre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ con la cohomología límite.

Definición 6.6. El espacio $\mathcal{A}_0 = L_0\,(\mathrm{GL}_2(K)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ de *formas automorfas cuspidales* con valores en $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ es el conjunto de funciones

$$f : \mathrm{GL}_2(K)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

tales que

1. f es invariante por un subgrupo compacto abierto;
2. las $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$-transformaciones de f generan una suma directa finita de representaciones irreducibles;
3. f es cuspidal, esto es

   $$\int_{\mathbb{A}/K} f\left(g\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dy = 0$$

   para toda $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$.

Proposición 6.7. *Sea H un subgrupo aritmético de $\mathrm{GL}_2(\hat{A})$. Supongamos que el estabilizador en $H_x = xHx^{-1} \cap \mathrm{GL}_2(K)$ de cualquier vértice o arista de τ es un p-grupo. Entonces, existe un isomorfismo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty) \times \mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$-módulos*

$$H^1_{\mathrm{rig}!}(M_H^2 \otimes K_\infty^{sep}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)}(V_{\mathrm{sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell), L_0(\mathrm{GL}_2(K)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/H, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}}\,.$$

Demostración. Tomando $R = C^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, tenemos un isomorfismo entre $\mathcal{H}^1(\tau, C^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty), \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ y el $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty) \times \mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$-módulo $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)}(V_{\mathrm{sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell), C^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty) \times \mathrm{GL}_2(K_\infty), \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$.

Usando la descripción adélica de $M_H^2(\mathbb{C}_\infty)$ (Teorema 4.16), el Teorema de comparación de Drinfeld (Teorema 5.9) y la Proposición 6.5, se tiene el isomorfismo deseado. □

El resultado fundamental en [8] es el siguiente.

Teorema 6.8 ([8, Proposición 10.3])**.** *Teorema principal de Drinfeld: Se tiene un isomorfismo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty) \times \mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$-módulos*

$$\mathbf{H} := \varinjlim_H H^1_{\mathrm{rig}!}(M_H^2 \otimes K_\infty^{sep}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)}(V_{\mathrm{sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell), \mathcal{A}_0) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}}\,.$$

Demostración. Los subgrupos U_I (ver Capítulo 1) son cofinales en la categoría de subgrupos aritméticos de $\mathrm{GL}_2(\hat{A})$. Además, tales grupos satisfacen las condiciones de la Proposición 6.7. Tomando el límite sobre H, en donde H corre sobre todos los subgrupos aritméticos de $\mathrm{GL}_2(\hat{A})$ en la Proposición 6.7, se tiene el teorema. □

7. La ley de reciprocidad de Drinfeld

Como se observó en la Proposición 2.18, el grupo de adeles $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$ actúa sobre M_H^2 y la acción se extiende a las compactificaciones (Teorema 2.21). Por lo tanto, el $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espacio vectorial $\mathbf{H}$ tiene una estructura natural de $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$-módulo. A continuación, obtendremos una descomposición de $\mathbf{H}$ como producto tensorial restringido en donde la componente al infinito es especial. De esta manera se obtiene la ley de reciprocidad de Drinfeld.

7.1. Representaciones automorfas

En esta sección, daremos una descripción del tipo de representaciones en las que estamos interesados. Más detalles sobre los resultados que aquí se anuncian pueden ser consultados en [14], [24] y en [2].

Sea G un grupo topológico localmente profinito (un grupo topológico con base de vecindades abiertas de 1 que consiste de grupos profinitos). Los grupos $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$ y $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (para p un primo) son ejemplos de tales grupos.

Definición 7.1. Sea π una representación de G sobre un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V. Decimos que la *representación* π *es suave* si, para todo $v \in V$, el estabilizador de v contiene un subgrupo abierto. Diremos que la *representación* π *es admisible* si además, para todo subgrupo compacto abierto $\mathcal{K}$, el subespacio $V^{\mathcal{K}}$ que consiste de aquellos vectores que son invariantes bajo $\mathcal{K}$ es de dimensión finita.

Supondremos además que G tiene un subgrupo compacto abierto $\mathcal{K}$ tal que $G/\mathcal{K}$ es numerable. Esta hipótesis es verdadera para todo subgrupo compacto abierto y los ejemplos dados anteriormente verifican la hipótesis. Un grupo localmente profinito G que verifica la hipótesis enunciada posee la siguiente propiedad: sea (π, V) una representación admisible suave e irreducible de H, entonces V tiene una base numerable.

El *lema de Schur* se satisface: sea (π, V) una representación admisible e irreducible de G y f un endomorfismo de V. Entonces f es una homotecia.

Sea V una representación admisible e irreducible de G. De acuerdo al lema de Schur, el centro Z de G actúa sobre V por homotecias. En otras palabras, existe un carácter ψ_π de G tal que $\pi|_Z = \psi_{pi} \operatorname{Id}_V$.

Ejemplo 7.2. Ejemplos de representaciones admisibles.

- El espacio $\mathcal{A}_0 = L_0(\mathrm{GL}_2(K) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ es una representación admisible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ ([24, Proposición 11.11]).

- $V_{\mathrm{sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ es una representación admisible irreducible de $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ ([24, 2.9.1]).

- $\mathbf{H}$ es una representación admisible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$. Esto se sigue por definición y por los resultados de la sección anterior.

A continuación, daremos un resumen sobre la clasificación de representaciones admisibles irreducibles sobre los complejos como en [14, §4]. En primer lugar, cualquier representación finita admisible irreducible es de hecho 1-dimensional (ver [24, Proposición 2.7]). Tales representaciones no serán de interés para nosotros. Consideremos, para x un lugar de K, los subgrupos de $\mathrm{GL}_2(K_x)$

$$B_x = \begin{pmatrix} K_x^\times & K_x \\ 0 & K_x^\times \end{pmatrix}, \quad N_x = \begin{pmatrix} 1 & K_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } T_x = \begin{pmatrix} K_x^\times & 0 \\ 0 & K_x^\times \end{pmatrix}.$$

Sea (π, V) una representación suave de $\mathrm{GL}_2(K_x)$. Consideremos los siguientes espacios

$$V(N_x) = \sum_{v\in V,\ n\in N_x} \mathbb{C}(v - \pi(n)v)$$

y

$$V_{N_x} = V/V(N_x).$$

El espacio V_{N_x} está dotado de una representación suave de $T_x \simeq B_x/N_x$ proveniente de π y denotada por π_{N_x}; la representación (π_{N_x}, V_{N_x}) de T_x se llama *módulo de Jacquet de* (π, V). El funtor exacto aditivo ([2, §9])

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}(\mathrm{GL}_2(K_x)) &\to \mathrm{Rep}(T_x) \\ (\pi, V) &\mapsto (\pi_{N_x}, V_{N_x}) \end{aligned}$$

se llama *el funtor de Jacquet*.

Las representaciones de $\mathrm{GL}_2(K_x)$ se separan en dos grupos, aquellas en donde el módulo de Jacquet es nulo, llamadas *representaciones cuspidales*, y aquellas en donde el módulo de Jacquet no se anula. En este último caso diremos que pertenecen a la *serie principal*.

Sea (π, V) una representación de $\mathrm{GL}_2(K_x)$ con $V_{N_x} \neq \{0\}$. La representación π_{N_x} de T_x puede verse como una representación de B_x trivial sobre N_x.

Sea (σ, W) una representación suave de un subgrupo cerrado H de $\mathrm{GL}_2(K_x)$. Denotemos por $\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{GL}_2(K_x)} \sigma$ a la representación de $\mathrm{GL}_2(K_x)$ definida como el espacio de funciones $f : \mathrm{GL}_2(K_x) \to W$ tales que

- para todo $h \in H$ y $g \in \mathrm{GL}_2(K_x)$, $f(hg) = \sigma(h)f(g)$,
- existe un subgrupo compacto abierto $\mathcal{K}$, que depende de f, tal que $f(gk) = f(g)$ para todo $g \in \mathrm{GL}_2(K_x)$ y todo $k \in \mathcal{K}$,

y $\mathrm{GL}_2(K_x)$ actúa por la derecha sobre este espacio de funciones. Esta representación suave ([24, §2]) es *la representación inducida por* σ *a* $\mathrm{GL}_2(K_x)$.

Proposición 7.3 ([2, §9])**.** *Sea* (π, V) *una representación suave e irreducible de* $\mathrm{GL}_2(K_x)$*. Entonces, las siguientes aserciones son equivalentes*

(a) la representación π *no es cuspidal:* $V_{N_x} \neq \{0\}$*,*

(b) la representación π *es isomorfa a una subrepresentación de una representación de la forma* $\mathrm{Ind}_{B_x}^{\mathrm{GL}_2(K_x)} \chi$*, en donde* χ *es un carácter de* T_x*.*

Nota 7.4. La representación especial $V_{\mathrm{sp}}(\mathbb{C})$ no es cuspidal (véase [14]).

Proposición 7.5 ([24, §2])**.** *Sean* χ_1 *y* χ_2 *dos caracteres de* $K_x^\times$*. Sea*

$$\xi : \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto |t_1/t_2|_x^{1/2} \chi_1(t_1)\chi_2(t_2),$$

el carácter de T_x*. Sea* $\rho(\chi_1, \chi_2) = \mathrm{Ind}_{B_x}^{\mathrm{GL}_2(K_x)} \xi$*. Entonces*

1. *la representación* $\rho(\chi_1, \chi_2)$ *es irreducible si y solamente si* $\chi_1\chi_2^{-1}$ *no es algún carácter de la forma* $x \mapsto |x|_x^{\pm 1}$*;*

2. *las representaciones* $\rho(\chi_1, \chi_2)$ *y* $\rho(\chi_1', \chi_2')$ *son isomorfas si y solamente si* $\{\chi_1, \chi_2\} = \{\chi_1', \chi_2'\}$*.*

Proposición 7.6 ([2, §9])**.** *Las representaciones suaves irreducibles de* $\mathrm{GL}_2(K_x)$ *son admisibles.*

Sea $\mathcal{O}_x$ el anillo de enteros de K_x. Una representación (π, V) admisible e irreducible de $\mathrm{GL}_2(K_x)$ se llama *no ramificada*, *de clase 1* o *esférica*, si $V^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_x)} \neq \{0\}$. La dimensión de $V^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_x)}$ es el número de veces que la representación identidad de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_x)$ está contenida en π.

Decimos que un *carácter* χ *de* $K_x^\times$ *es no ramificado* si su núcleo contiene a $\mathcal{O}_x^\times$.

Proposición 7.7. *Sea* (π, V) *una representación admisible irreducible de* $\mathrm{GL}_2(K_x)$*. La representación* π *es de clase* 1 *si y solamente si es de la forma* $\rho(\chi_1, \chi_2)$*, en donde* χ_1 *y* χ_2 *son caracteres no ramificados de* $K_x^\times$*. En este caso, la representación identidad de* $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_x)$

está contenida una sola vez en π*. Además,* $\rho(\chi_1, \chi_2)$ *es una representación (pre)-unitaria (es decir, existe un producto interior* $\mathrm{GL}_2(K_x)$*-invariante sobre* V*) si y sólo si* $|\chi_1(\varpi_x)| = |\chi_2(\varpi_x)| = 1$*. Dos representaciones,* $\rho(\chi_1, \chi_2)$ *y* $\rho(\chi'_1, \chi'_2)$*, de clase* 1 *son isomorfas si y solamente si* $\{\chi_1, \chi_2\} = \{\chi'_1, \chi'_2\}$*.*

La demostración del resultado anterior se encuentra en [14, Teorema 4.23].

7.2. Producto tensorial restringido de representaciones

Para todo lugar x de K, sea (π_x, V_x) una representación admisible irreducible y unitaria de $\mathrm{GL}_2(K_x)$, con valores en un espacio complejo V_x. Supongamos que, para casi todo lugar x, la representación π_x es de clase 1. Sea S_0 el conjunto de lugares x tales que π_x no es de clase 1. Para todo lugar x de clase 1 denotemos por ξ_x a un elemento no nulo de V_x estable bajo $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_x)$.

Sea S un conjunto finito de lugares de K, $S \supset S_0$, y $V_S = \otimes_{x \in S} V_x$, $\pi_S = \otimes_{x \in S} \pi_x$. Sea S' un conjunto finito de lugares de K que contiene a S. Se tiene una aplicación natural

$$V_S \to V_{S'}, \quad \xi \mapsto (\xi \otimes_{x \in S' - S} \xi_x).$$

De esta manera, es posible definir una representación $(\varinjlim \pi_S, \varinjlim V_S)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, en donde el límite es sobre los conjuntos finitos de lugares de K que contienen a S_0. Por completación del espacio de representación (con respecto a la forma hermitiana deducida a partir de V_x) obtenemos una representación unitaria (π, V) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, denotada como

$$(\otimes'_x \pi_x, \hat{\otimes}_x V_x),$$

y que es irreducible y admisible ([14, p.76]). A tal representación se le conoce como *el producto tensorial restringido a los factores locales* π_x*.*

El siguiente importante resultado puede encontrarse en [14, §4].

Teorema 7.8. *Cada representación admisible, irreducible y unitaria* π *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ *se escribe de manera única como un productos tensorial restringido con factores locales* π_x *admisibles irreducibles y unitarios.*

Los enunciados y pruebas que a continuación enunciaremos, pueden encontrarse en [14, §5] y en [30].

Un resultado fundamental en la teoría de formas automorfas, ver [24, Proposición 11.1.1], afirma que toda representación de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ sobre $\mathcal{A}_0$

se descompone como una suma directa de representaciones admisibles (y unitarias) con *multiplicidad 1* :

$$\mathcal{A}_0 = \bigoplus_{\pi \in \Pi} \pi,$$

en donde Π es un conjunto de representaciones admisibles irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. En tal descomposición, estamos considerando al espacio $\mathcal{A}_0$ sobre los complejos.

Dos de los resultados más importantes en la teoría de representaciones automorfas son:

- Propiedad de multiplicidad 1: si $\pi \neq \pi'$, entonces V_π y $V_{\pi'}$ *no* son isomorfos.

- Propiedad fuerte de multiplicidad 1: si los factores locales de V_π y $V_{\pi'}$ son isomorfos para casi todo lugar x, entonces $\pi = \pi'$.

Escojamos un encaje $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$. Tenemos $\mathcal{A}_0(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}})$. El grupo $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}}\mathbb{C}$ actúa sobre $\mathcal{A}_0(\mathbb{C})$ y permuta a los espacios V_π debido a la multiplicidad uno. De hecho, los espacios V_π son invariantes bajo tal acción. Fijemos un V_π y sea $V_{\pi,x} = \rho(\chi_1, \chi_2)$ un factor local que sea de clase 1 definido por los caracteres $\{\chi_1, \chi_2\}$. Si los dos valores $\{\chi_1(\varpi_x), \chi_2(\varpi_x)\}$ no están en $\overline{\mathbb{Q}}$, entonces la órbita de $V_{\pi,x}$ bajo $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}})$ no es numerable, lo cual es falso. Entonces $\{\chi_1(\varpi_v), \chi_2(\varpi_v)\} \subset \overline{\mathbb{Q}}$. De esto se sigue que $\mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}})$ es una suma directa sobre $\pi \in \Pi$ de representaciones admisibles irreducibles W_π tales que $V_\pi = \mathbb{C} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} W_\pi$, para todo $\pi \in \Pi$. Además, si $V_{\pi,x}$ es de clase 1, $\chi_1(\varpi_x)$ y $\chi_2(\varpi_x)$ son de valor absoluto 1 (en $\mathbb{C}$). Esta última propiedad no depende de la elección del encaje escogido. En efecto, si $\gamma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, entonces $\gamma(V_\pi) = V_{\gamma\circ\pi}$ y $V_{\gamma\circ\pi,x} = \rho(\gamma \circ \chi_1, \gamma \circ \chi_2)$.

Como conclusión de lo dicho anteriormente, se tiene que

$$\mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{\pi \in \Pi} (\overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} W_\pi),$$

en donde los espacios $W_\pi(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes W_\pi$ cuentan con factores locales $W_{\pi,x}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) := W_\pi(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x$ casi todos de clase 1. Los caracteres χ_1, χ_2 no ramificados de K_x^* correspondientes al factor local $W_\pi(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x$ de clase 1 verifican que $\chi_i(\varpi_x)$, con $i = 1, 2$, son números algebraicos de valor absoluto 1 en $\mathbb{C}$ para cualquier encaje de $\overline{\mathbb{Q}}$ en $\mathbb{C}$.

Ahora, fijemos un encaje de $\overline{\mathbb{Q}}$ en $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Recordemos que $V_{\mathrm{sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ es un $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$-módulo admisible irreducible.

Teorema 7.9. *Se tiene el isomorfismo de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty) \times \mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)$*-módulos*

$$\mathbf{H} \simeq \bigoplus_{\pi \in \Pi_\infty} \left(\otimes'_{x \neq \infty} W_{\pi,x}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}} \right),$$

en donde $\Pi_\infty = \left\{ \pi \in \Pi : V_{\mathrm{sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq W_{\pi,\infty}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \right\}$.

Demostración. El resultado se sigue a partir del teorema principal de Drinfeld como sigue. Escribamos la descomposición de $\mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ en suma directa de representaciones irreducibles:

$$\mathcal{A}_0 = \bigoplus_{\pi \in \Pi} \left(\otimes'_v W_{\pi,x}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \right).$$

Notemos que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)}(V_{\mathrm{sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell), W_\pi(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \neq \{0\}$ si y solamente si $\pi \in \Pi_\infty$, en donde $W_\pi(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ es un sumando directo irreducible de $\mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Más precisamente, si $\pi \in \Pi_\infty$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)}(V_{\mathrm{sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell), W_\pi(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \simeq \otimes'_{x \neq \infty} W_{\pi,x}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Por lo tanto, se tiene el isomorfismo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$-módulos

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(K_\infty)}(V_{\mathrm{sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell), \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \simeq \bigoplus_{\pi \in \Pi_\infty} \left(\otimes'_{x \neq \infty} W_{\pi,x}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \right).$$

De este último isomorfismo se sigue el resultado. □

Observe que el grupo $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ actúa sobre $\mathbf{H}$ y esta acción conmuta con la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$. Entonces $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ actúa sobre cada $\otimes'_{x \neq \infty} W_{\pi,x}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}}$, con $\pi \in \Pi_\infty$. Como $\otimes'_{x \neq \infty} W_{\pi,x}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ es una representación irreducible admisible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$, el lema de Schur muestra que todo endomorfismo $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-lineal de $\otimes'_{x \neq \infty} W_{\pi,x}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}}$ que conmuta con la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$ es de la forma $\lambda \otimes \sigma$, donde $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ y σ es un endomorfismo $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-lineal de $\mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}}$. Dicho de otra forma, el grupo $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ actúa sobre $\mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}}$ y esta acción es irreducible. Denotemos por $\gamma \mapsto \sigma(\pi)_\ell(\gamma)$ a la acción de $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ sobre $\mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}}$. Note la dependencia de las elecciones de $\pi \in \Pi_\infty$ y ℓ de tal acción.

Definición 7.10. Denotemos por Σ_∞ al conjunto de clases de isomorfismo de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-representaciones 2-dimensionales de $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$

$$r : \mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

que son ramificadas solamente en un número finito de lugares de K y tales que $r|_{\mathrm{Gal}(K_\infty^{sep}/K_\infty)} \simeq \mathrm{sp}_{\mathrm{Gal}}$.

De lo dicho anteriormente, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 7.11. *Existe una aplicación*

$$\begin{aligned} \Pi_\infty &\to \Sigma_\infty \\ \pi &\mapsto \sigma(\pi)_\ell \end{aligned}$$

y un isomorfismo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty) \times \mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$*-módulos*

$$\mathbf{H} \simeq \bigoplus_{\pi \in \Pi_\infty} \left(\otimes'_{x \neq \infty} W_{\pi,x}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \sigma(\pi)_\ell \right).$$

La aplicación $\pi \mapsto \sigma(\pi)$ es una forma de la aplicación de reciprocidad en la teoría de campos de clase entre representaciones automorfas que son iguales a la representación especial en infinito y representaciones de Galois de dimensión dos que son iguales a la representación especial en infinito.

7.3. La ley de reciprocidad de Drinfeld

El siguiente resultado es fundamental para entender la relación entre π y $\sigma(\pi)_\ell$.

Teorema 7.12 ([8, Teorema 2 §11])**.** *Sean* $\pi \in \Pi_\infty$ *y* x, $x \neq \infty$, *un lugar de* K *tal que* $W_{\pi,x}$ *es no ramificado y sean* $\{\chi_1, \chi_2\}$ *los caracteres de* K_x^* *que le corresponden. Entonces,* x *es un lugar no ramificado para la representación* $\sigma(\pi)_\ell : \mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. *Sea* $\mathrm{Fr}_x \in \mathrm{Gal}(K_x^{sep}/K_x)$ *una elección para el elemento Frobenius en el lugar* x. *Entonces, los eigenvalores de* $\sigma(\pi)_\ell(\mathrm{Fr}_x)$ *son* $\{q_x^{1/2}\chi_1(\varpi_x), q_x^{1/2}\chi_2(\varpi_x)\}$, *en donde* q_x *es la cardinalidad del campo residual en el lugar* x.

Como consecuencia directa del Teorema 7.12 resulta que si $\sigma(\pi)_\ell \simeq \sigma(\pi')_\ell$, entonces $\pi \simeq \pi'$. En efecto, para todo lugar x no ramificado para W_π y $W_{\pi'}$, los factores locales $W_{\pi,x}$ y $W_{\pi',x}$ son isomorfos, lo cual implica que $\pi \simeq \pi'$ gracias a la propiedad fuerte de multiplicidad 1.

Finalmente, enunciemos la *ley de reciprocidad de Drinfeld*. Para una representación irreducible π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, sea ω_π la acción por escalar definida por π restringida al centro de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Usaremos el mapeo de reciprocidad de la teoría de campos de clase ([34]),

$$\mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \to \mathrm{GL}_1(K) \backslash \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}),$$

de modo que para un carácter 1-dimensional χ del grupo de clases de ideles, tenemos un carácter χ de $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ por composición con el mapeo de reciprocidad.

Teorema 7.13 (Ley de reciprocidad de Drinfeld). *La aplicación* $\Pi_\infty \to \Sigma_\infty$ *del Teorema 7.11 es una biyección. Para* $\pi \mapsto \sigma(\pi)$, *se tiene*

1. $\sigma(\pi \otimes \chi) = \sigma(\pi) \otimes \chi^{-1}$ *para* χ *un carácter* 1*-dimensional.*

2. $\det(\sigma(\pi)) = \omega_\pi^{-1}(-1)$ *para el carácter central* ω_π.

El Teorema 7.13 es un caso particular de la correspondencia de Langlands para GL_2 sobre campos de funciones de característica positiva en el caso cuando las representaciones al infinito son especiales. La prueba del teorema recae fuertemente en la utilización de funciones-L (véase [6, §9] y [24, Teorema 12.2] para la sobreyectividad de la aplicación de reciprocidad).

En un trabajo posterior, [9], Drinfeld construyó un sistema de cubrientes étales de M_I^2 y, por lo cual, se puede asociar representaciones de Galois a representaciones automorfas en donde la componente al infinito es cuspidal. Hacia 1976, Drinfeld introdujo otros objetos de naturaleza más geométrica llamadas *gavillas elípticas*. Probó que esta noción es equivalente a la de módulo de Drinfeld y, por lo tanto, las variedades obtenidas coinciden. El año siguiente, en [10], este concepto de gavilla elíptica se generaliza para obtener objetos llamados *Shtukas* en donde el lugar infinito no juega rol alguno. Usando las Shtukas de rango 2, y sus variedades modulares asociadas, se asocia cada representación de Galois ℓ-ádica a toda representación automorfa cuspidal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$; dando así, la correspondencia de Langlands para GL_2. Laurent Lafforgue generalizó la correspondencia para GL_n [26] y Vincent Lafforgue para cualquier grupo reductivo [27].

Agradecimientos

El autor desea expresar su profundo agradecimiento al Dr. Timmothy Gendron y al Dr. Alberto Verjovsky por su apoyo y guía, así como por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Julio César Galindo López
Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Área de la Investigación Científica,
Circuito exterior,
Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.
cesar_gal@ciencias.unam.mx

Referencias

[1] Berkovich V. *Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces*, Publ. Math. IHES **78** (1993), 5-161.

[2] Bushnell C. y Henniart G. *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, **335** (2006).

[3] Blum A. y Stuhler U. *Drinfeld Modules and Elliptic Sheaves*, Springer. Lect. Notes Math, (1997).

[4] Bosch S., Günter U. y Remmert R. *Non-archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Springer, (1984).

[5] Conrad B. *Several approaches to non-archimedean geometry*, en p-adic geometry: Lectures from the 2007 Arizona Winter School, AMS (2008).

[6] Deligne P. *Les constantes des équations fonctionelles des fonctions L*, Lecture Notes in Math. **349**.

[7] Deligne P. y Husemöller D. *Survey of Drinfeld modules*, Contemp. Math. **67** (1987) 25-91.

[8] Drinfeld V.G. *Elliptic Modules*, Math. USSR-Sbornik **94** (1974), 561-592.

[9] Drinfeld V.G. *Elliptic Modules II*, Math. USSR-Sbornik **102** (1977) 182-194.

[10] Drinfeld V.G. *Langland´s conjecture for GL(2) over functional fields*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki (1978).

[11] Fresnel J. y van der Put M. *Rigid analytic geometry and its applications*, Birkaüser (2004).

[12] Gekeler E.U. *Drinfeld Modular Curves*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag **1231** (1986).

[13] Gekeler E.U. *Moduli for Drinfeld modules*, en The Arithmetic of Function Fields (eds. D. Goss et al) de Gruyer (1992), 153-170

[14] Gelbart S. *Automorphic forms on adele groups*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press **83** (1975).

[15] Goldman O. y Iwahori N. *The space of p-adic norms*, Acta Math. **109** (1963), 137-177.

[16] Görtz U. y Wedhorn T. *Algebraic Geometry I*, Lectures in Mathematics, Springer.

[17] Goss D. *Basic structures of function field arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin (1996).

[18] Grothendieck A. y Dieudonné J. *Éléments de Géometrie Algébrique*, Chap 2, Pub. Math. IHES **8**.

[19] Hayes D. *Explicit class field theory in global function fields*, G. C. Rota (ed.), Studies in Algebra and Number Theory, New York, Academic Press (1979), 173-217.

[20] Harder G. *Chevalley groups over function fields and automorphic forms*, Ann. of Math. **100** (1974), 249-306.

[21] Harder G. y Kazhdan D. *Automorphic forms on GL(2) over function fields (after V.G. Drinfeld)*, en: Automorphic Forms, Representations and L-functions, (eds. A. Borel, W. Casselman) Proc. Symp. Pure. Math. XXXIII part 2, Amer. Math. Soc. (1979), 357-379.

[22] Hartshorne R. *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., Spinger-Verlag **52** (1977).

[23] Huber R. *Étale Cohomology of Rigid Analytic Varieties and Adic Spaces*, Vieweg. Brauchschweig/Wiesbaden (1996).

[24] Jacquet H. y Langlands R. P. *Automorphic forms on* $GL(2)$, Lecture Notes in Math. **114** (1970).

[25] Katz N. y Mazur B. *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press **108** (1985).

[26] Lafforgue L. *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147** (2002), 1-241.

[27] Lafforgue V. *Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale*, arXiv:1209.5352.

[28] Laumon G. *Cohomology of Drinfeld modular varieties I*, Cambridge University Press (1996).

[29] Lehmkuhl T. *Compactification of the Drinfeld modular surface (Habilitationsschrift)*, Göttingen (2000).

[30] Piatetski-Shapiro I. *Multiplicity One Theorems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, part 1 **33** (1979), 209-212.

[31] Rosen M. *Number Theory in Function Fields*, GTM **210**.

[32] Serre J.P. *Arbres, amalgames,* SL_2, Soc. Math. France, Astérisque **46** (1977).

[33] Serre J.P. *Cohomologie des groupes discrets*, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press **79** (1971), 77-169.

[34] Serre J.P. *Corps Locaux*, Hermann, Paris (1962).

[35] Serre J.P. *Faisceaux Algebriques Coherents*, The Annals of Mathematics **61(2)**, 197-278.

[36] Serre J.P. *Statements of results*, en Seminar on complex multiplications, 1957/58 Ed. by Borel et al, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, NY **21** (1966).

[37] Tate J. *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. **12** (1971), 257-289.

[38] Thakur D. *Function Field Arithmetic* , World Scientific Pub. (2004).

[39] Villa-Salvador G. *Topics in the theory of algebraic function fields*, Birkhäuser, Boston (2006).