Morfismos, Vol. 15, No. 2, 2011, pp. 9–18

Grupoide de movimientos y modelos de Gelfand para el grupo diédrico D_{2n} *

Gamaliel Cerda-Morales

Resumen

A cada acción de un grupo G sobre un conjunto X podemos asociar naturalmente un grupoide de movimientos $M(G, X)$ cuyos objetos son puntos de X y sus flechas $(g, x) \in G \times X$. Los caracteres unidimensionales de $M(G, X)$ permiten torcer la representación natural de G asociada al par (G, X). Esta construcción suministra, de modo geométrico, un modelo de Gelfand, es decir, una suma directa de todas las representaciones irreducibles del grupo G. En particular, conjeturamos una aplicación sobre la dimensión de las involuciones en el grupo diédrico D_{2n}.

2010 Mathematics Subject Classification: 18A05, 20C30.
Keywords and phrases: grupoide, modelos de Gelfand, grupo diédrico.

1 Introducción

Los grupoides han sido introducidos en [1] por H. Brandt en 1926, para un artículo sobre composición de formas cuadráticas. En topología algebraica, P. Higgins, R. Brown y otros, exploran grupoides fundamentales asociados a un espacio topológico, generalizando en el contexto de teoría de grafos, propiedades fundamentales de grupos y generadores. Desde un aspecto categórico observado en [3] por A. Connes, analizamos una aplicación del grupoide de movimientos a la representación del grupo diédrico.

---

*Tesis de Maestría en Matemáticas presentada en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, 2011, bajo la dirección del Dr. Jorge Soto Andrade. Una versión extensa de este trabajo ha sido enviado para evaluar su posible publicación en el Boletín de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia.

1.1 Desde una pequeña categoría

Un conjunto $\mathcal{C}$ de morfismos, que conecta elementos de un conjunto de objetos, denotados por $Obj(\mathcal{C})$ se llama categoría, si posee la siguiente estructura: (1) existen dos aplicaciones $i, t : \mathcal{C} \to Obj(\mathcal{C})$, que especifican objetos de inicio y término de cada morfismo en $\mathcal{C}$, (2) existe una operación de composición asociativa sobre morfismos en $\mathcal{C}^o = \{(f_1, f_2) : i(f_1) = t(f_2)\}$, y finalmente, (3) para cada $A \in Obj(\mathcal{C})$, existe una identidad $e_A \in \mathcal{C}$ que asocia un morfismo cerrado a todo objeto; es decir, $i(e_A) = t(e_A) = A$.

Para nuestro estudio, un grupoide es una categoría, donde todo morfismo es invertible. Entonces, para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfismo de A en B, existe $f^{-1} \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$, tal que $f \circ f^{-1} = e_B$ y $f^{-1} \circ f = e_A$.

1.2 Nociones de grupos a grupoides

Sea A un objeto del grupoide $\mathcal{C}$, el conjunto de todos los morfismos con inicio y término A es un grupo. En efecto, para todo $A \in Obj(\mathcal{C})$ se tiene asociada una identidad e_A, su ley de composición es asociativa, y cada morfismo tiene un inverso, que es único.

Observación 1.2.1. Para $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, si existe $\gamma \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, se cumple $Hom_{\mathcal{C}}(A, A) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(B, B)$, pues $\gamma^{-1} \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ y para la aplicación conjugación $C_\gamma : Hom_{\mathcal{C}}(A, A) \to Hom_{\mathcal{C}}(B, B)$, definida

$$C_\gamma(f) = \gamma \circ f \circ \gamma^{-1},$$

es un isomorfismo. Además, si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\gamma \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, tenemos $\gamma^{-1} \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$.

Lo que muestra la suficiencia de:

Proposición 1.2.2. *Dados $A, B \in Obj(\mathcal{C})$. Si existe $\gamma \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, entonces $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = \gamma \circ Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$, donde $\gamma \circ Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ es el conjunto $\{\gamma \circ f : f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)\}$.*

Todo grupoide $\mathcal{C}$ es conexo, si existe $\gamma \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\forall A, B \in Obj(\mathcal{C})$. Este tipo de grupoide, muestra que $Obj(\mathcal{C})$ es un G-conjunto, donde G es un grupo, salvo isomorfía, asociado a dicho grupoide, llamado grupo de holonomía generado por los morfismos con inicio y término un objeto de $\mathcal{C}$. Notar que en este caso, los grupos son isomorfos.

Definición 1.2.3. Llamamos tipo de holonomía del grupoide $\mathcal{C}$ conexo, a la clase de isomorfía del grupo $Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$, asociado a $A \in Obj(\mathcal{C})$.

Recíprocamente, dado un grupo finito G, es posible definir un grupoide sobre un G-conjunto X, cuya acción $\sigma : G \times X \to X$, está dada por multiplicación izquierda $\sigma_g(x) = gx$. $\forall g \in G, x \in X$. Si tal acción existe, llamamos (G, X) un par geométrico.

Definición 1.2.4. El grupoide de movimiento sobre X, denotado $M(G, X)$, es una categoría, donde $Obj(M) = X$ y su conjunto de morfismos (o flechas) es $G \times X$, con multiplicación sobre pares $M^o = \{((h, gx), (g, x)) : g, h \in G\}$, según regla asociativa:

$$(h, gx) \circ (g, x) = (hg, x), \tag{1}$$

donde las aplicaciones $i, t : M(G, X) \to X$ son la proyección en la segunda componente y la acción de grupo, respectivamente.

1.3 Grupo de isotropía y G-acción

Sean $x, y \in X$, los morfismos del grupoide M de x en y, denotados por $G(x, y)$. Es claro que el subgrupo de isotropía asociado a x, es isomorfo a su grupo de holonomía $G(x)$ de morfismos de x en x, pues basta identificar $(g, x) \to g$ de $G(x)$ en G_x un homomorfismo de grupos. En efecto, sean $g, h \in G_x$, tenemos $gh \in G_x$, al aplicar regla de composición (1).

Observación 1.3.1. Denotemos por $Fl(M)$ el conjunto de flechas (o morfismos) del grupoide $M(G, X)$. Como $M(G, X) = \bigcup_{x,y \in X} G(x, y)$, la cardinalidad de $Fl(M)$ es $|G||X|$, en efecto, $|G(x, y)| = |G(x)| = \frac{|G|}{|X|}$ cuando X es un G-conjunto transitivo. En caso contrario, debemos considerar las órbitas asociadas a la acción, pues G actúa transitivamente sobre $\mathcal{O}_x$, y $X = \cup_{x \in X} \mathcal{O}_x$. En este caso, $Fl(M) = \cup_{x \in \Lambda} Fl(M(G, \mathcal{O}_x))$, donde Λ es un sistema de representantes para la G-acción.

Ejemplo 1.3.2. Sea D_{2n} el grupo de simetrías del n-ágono regular, con acción natural sobre sus vértices $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Esta acción es transitiva, y el subgrupo de isotropía asociado a $i \in I_n$, denotado por G_i, es el conjunto $\{1, s_i\}$, donde 1 es la identidad del grupo, y s_i la simetría que fija el vértice i. Entonces, el conjunto de flechas $G(i)$ del grupoide $M(D_{2n}, I_n)$ está representado por $\{(1, i), (s_i, i)\}$, el grupo cíclico de orden 2, $\mathbb{Z}_2$.

2 Acción de grupos de simetría

2.1 Representación natural torcida

Un carácter asociado a $M(G, X)$, es una aplicación $\varpi : M(G, X) \to \mathbb{C}^\times$, que satisface $\varpi(f \circ h) = \varpi(f)\varpi(h)$, para todo elemento $f, h \in M(G, X)$. El grupo de caracteres asociado al grupoide, se denota $\widehat{M}(G, X)$. De esto:

Observación 2.1.1. Si $\varpi(g,x) = z$, entonces $\varpi(g^{-1},gx) = z^{-1}$, pues $(g^{-1},gx)\circ(g,x) = (1,x)$, y $\varpi(1,x) = 1$. Dada $g \in G$ una reflexión, que fija el objeto $x \in X$, tenemos $\varpi^2(g,x) = 1$, pues $\varpi(g,gx)\varpi(g,x) = \varpi(g^2,x)$ sobre $\mathbb{C}^\times$. Sean x, y sobre X, un conjunto G-transitivo, notemos que $G(x)$ es isomorfo a $G(y)$, por lo tanto, el carácter restringuido a dichos grupos de isotropía, satisface $\varpi(G(x)) \simeq \varpi(G(y))$.

Para el grupoide $M(D_{2n}, I_n)$, asociado a la acción del grupo D_{2n} sobre los vértices del n-ágono regular, obtenemos:

Proposición 2.1.2. *El grupo de caracteres $\widehat{M}(D_{2n}, I_n)$, está parametrizado por el conjunto:*

$$\mathbb{Z}_2 \times \{(v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n : v_1v_2...v_n = 1\}. \tag{2}$$

Demostración. Como $G(x,y) = \gamma G(x)$, para algún $\gamma \in G(x,y)$, $\forall x,y \in I_n$, notemos que $|G(x,y)| = 2$. Luego, los morfismos que conectan x con sus vértices adyacentes están parametrizados por una rotación de orden n, θ, y una reflexión η que envía x en y. Por lo tanto, existe una reflexión $\zeta \in D_{2n}$ que fija x, tal que $(\eta,x) = (\theta,x)\circ(\zeta,x)$. Aplicando el carácter ϖ, tenemos $\varpi(\eta,x) = z\varpi(\theta,x)$, donde $z \in \mathbb{C}$, tal que $z^2 = 1$. Por la propiedad de funtor covariante, aplicada sobre $\prod_{i=1}^{n-1}(\theta,\theta^i 1) = (1,1)$, obtenemos la proposición si $v_i = (\theta,\theta^i 1)$. Ahora, si los vértices son no adyacentes, el argumento es análogo sobre las rotaciones y reflexión asociada. $\square$

Dado $\varpi \in \widehat{M}(D_{2n}, I_n)$, obtenemos representaciones $(\mathbb{C}, \varpi|_{D_{2n}(j)})$ del grupo de isotropía $D_{2n}(j)$ asociado al vértice j. En general, dada $(L^2(X), \rho)$ la representación natural de G, definida por $\rho_g \in Aut_{\mathbb{C}}(L^2(X))$, según $\rho_g(f)(x) = f(g^{-1}x)$; Aubert y Soto-Andrade, definen en [6], una representación torcida por elementos $\varpi \in \widehat{M}(G,X)$:

Definición 2.1.3. Sea $(L^2(X), \rho)$ representación natural de G. La representación natural torcida por ϖ, se define como $\rho_\varpi : G \to Aut(L^2(X))$, tal que

$$(\rho_\varpi)_g(f)(x) = \varpi(g, g^{-1}x)(\rho_g f)(x), \tag{3}$$

denotada por $(L^2(X), \rho_\varpi)$, para $\varpi \in \widehat{M}(G,X)$.

Observación 2.1.4. Notar que $(L^2(X), \rho_\varpi)$ es una representación de G, tal que $(\rho_\varpi)_g \in End(L^2(X))$,

$$\begin{aligned}
(\rho_\varpi)_g(\rho_\varpi)_h(f)(x) &= \varpi(g,g^{-1}x)(\rho_g(\rho_\varpi)_h(f))(x) \\
&= \varpi(g,g^{-1}x)\varpi(h,h^{-1}g^{-1}x)(\rho_g(\rho_h(f))(g^{-1}x) \\
&= \varpi(gh,h^{-1}g^{-1}x)f(h^{-1}g^{-1}x) \\
&= (\rho_\varpi)_{gh}(f)(x),
\end{aligned}$$

luego, $(\rho_\varpi)_{g^{-1}} = (\rho_\varpi)_g^{-1}$, con lo cual $(\rho_\varpi)_g \in Aut(L^2(X))$ y (ρ_ϖ) es una representación del grupo G, denominada representación natural torcida por el carácter ϖ del grupo G.

Un modelo de Gelfand para G, es la descomposición de $(L^2(X), \rho)$ en suma directa de todas sus representaciones irreducibles con multiplicidad uno. En [6], el G-conjunto X define un espacio de Gelfand, si $(L^2(X), \rho_\varpi)$ es un modelo de Gelfand para G. Una proposición útil para construir este tipo de espacios, verifica:

Proposición 2.1.5. *Sea X un G-conjunto. Si $X = \cup_{k=1}^{s} \mathcal{O}_k$ es la descomposición en G-órbitas de X, donde $\mathcal{O}_k$ es la órbita asociada al punto $x_k \in X$. Si G_{x_k} es el grupo de isotropía de cada punto x_k para cada $k = 1, .., s$, entonces,*

$$(L^2(X), \rho_\varpi) \simeq \bigoplus_{k=1}^{s} Ind_{G_{x_k} \uparrow G}(\varpi \mid_{G_{x_k}}), \tag{4}$$

tal que $(\varpi \mid_{G_{x_k}})(g) = \varpi(g, x_k), \forall g \in G_{x_k}$.

Demostración. $(\mathbb{C}, \varpi \mid_{G_{x_k}})$ es una representación 1-dimensional de G_{x_k}, pues ϖ es un carácter del grupoide $M(G, X)$; en particular, si consideramos $x = x_k$ y $f \in L^2(x_k)$, para todo $g \in G_{x_k}$, obtenemos $(\rho_\varpi)_g(f)(x_k) = \varpi(g, x_k) f(x_k)$. Por lo tanto, $(\rho_\varpi)_g(f) = (\varpi \mid_{G_{x_k}})(f)$, sobre $\{x_k\}$, donde $L^2(\{x_k\})$ se identifica con el subespacio G_{x_k}-estable de $L^2(X)$ formado por las funciones de soporte contenido en $\{x_k\}$. En general, $L^2(\mathcal{O}_k)$ es suma directa de $L^2(\{x\})$, si $x \in \mathcal{O}_k$. $\square$

Observación 2.1.6. Si μ es otro carácter asociado al grupoide $M(G, X)$, tal que $\varpi \mid_{G_{x_k}} = \mu \mid_{G_{x_k}}$, para todo $k = 1, .., s$, entonces, $\rho_\varpi \simeq \rho_\mu$.

2.2 Un pequeño ejemplo diédrico

Ilustremos la proposición (2.1.5) sobre el grupo de simetrías del triángulo equilátero, isomorfo al grupo diédrico de orden 6, D_6. Consideremos el D_6-conjunto $X = \{1, 2, 3\} \cup \{b\}$, donde b es el baricentro del triángulo. Dado que $G = \langle r, s \rangle$, donde r es la rotación en $2\pi/3$ grados, y s es la reflexión que fija el vértice 1. La acción de G sobre X es natural sobre los vértices, y $\sigma_g(b) = b$, para todo $g \in G$, es claramente una acción no transitiva, tal que $X = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_b$, donde $\mathcal{O}_1 = \{1, 2, 3\}$ y $\mathcal{O}_b = \{b\}$.

Los grupos de isotropía asociados son $G_1 = \{1, s\} \simeq \mathbb{Z}_2$ y $G_b = G$. Si ϖ es un carácter del grupoide $M(G, X)$, su restricción a los subgrupos G_i, con $i \in I_3$, es la misma, deducimos

$$\rho_\varpi \simeq Ind_{G_1 \uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2}) \oplus Ind_{G_b \uparrow G}(\varpi|_G), \tag{5}$$

y basta considerar ϖ un carácter tal que $\varpi|_{\mathbb{Z}_2} = sgn$ y $\varpi|_G = 1$. Luego, es claro que $Ind_{G_b\uparrow G}(\varpi|_G) = 1$, veamos que la representación $Ind_{G_1\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2})$ de dimensión 3, se descompone como suma de dos representaciones irreducibles, una de dimensión 1 y otra de dimensión 2. Usando la inducida de Mackey, la aplicación $\varpi|_{\mathbb{Z}_2} = sgn$ corresponde al conjunto $\{f : G \to \mathbb{C} : f(gs) = -f(g), \forall g \in G\}$, y es claro que $sgn \in Ind_{G_1\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2})$; pues $sgn(gs) = sgn(g)sgn(s) = -sgn(g)$. De esto, tenemos $Ind_{G_1\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2}) \simeq sgn \oplus sgn^{\perp}$.

Observación 2.2.1. Este último isomorfismo, se obtiene de la siguiente condición: si $f \in Ind_{G_1\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2})$, tal que $\langle sgn, f\rangle = 0$; al identificar f con el vector $f(D_6) \in \mathbb{C}^6$, obtenemos $f(1) = -f(r) - f(r^2)$, basta considerar el $\mathbb{C}$-espacio $U = \langle sgn\rangle$, para tener $U^{\perp} = \langle f_1, f_2\rangle$, cuyos vectores son $f_1 = (-1, 1, 0, 1, 0, -1)$ y $f_2 = (-1, 0, 1, 1, -1, 0)$.

El espacio $(U^{\perp}, \rho|_{U^{\perp}})$ es una subrepresentación de $Ind_{G_1\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2})$, pues en caso contrario, existe $U_0 \leq U^{\perp}$ generado por un vector no nulo f_0, si $f_0 \in U^{\perp}$, entonces $f_0 = z_1 f_1 + z_2 f_2$, para algún $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces, por estabilidad, podemos aplicar la acción ρ_g, y obtenemos:

$$\rho_g(f_0) = z_1 f_1(g^{-1}t) + z_2 f_2(g^{-1}t) = z(z_1 f_1(t) + z_2 f_2(t)), \tag{6}$$

para algún $z \in \mathbb{C}$, y $t, g \in G$. En particular, si $g = r$ y $t = sr$ en D_6, obtenemos de (6), $z_2 = zz_1$, lo que es una contradicción, pues no pueden ser ambos nulos z_1 y z_2. Finalmente, si denotamos $\pi = \rho|_{U^{\perp}}$, la representación irreducible de dimensión dos, tenemos:

$$\rho_{\varpi} = 1 \oplus sgn \oplus \pi, \tag{7}$$

un modelo de Gelfand para el grupo diédrico D_6.

3 Generalización de un modelo para D_{2n}

3.1 Simetrías del cuadrado

Antes de la generalización al grupo diédrico de orden 2n, veamos el caso $n = 4$, para el grupoide de movimientos asociado al D_8-conjunto, dado por $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. Este grupo actúa naturalmente sobre los vértices del cuadrado, mientras que

$$\sigma_g(\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}) = \{\{g(1), g(3)\}, \{g(2), g(4)\}\},$$

determina una acción no transitiva, cuyas órbitas son $\mathcal{O}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{O}_{\{1,3\}}$ igual a $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. A su vez, el estabilizador del vértice 1 es $\{(1, 1), (s, 1)\}$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, y de $\{1, 3\}$, denotado por $G(\{1, 3\})$, es $\{1, s, r^2, sr^2\} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Observación 3.1.1. Sea ϖ un carácter asociado al grupoide $M(D_8, I_4)$, entonces $\rho_\varpi \simeq Ind_{G(1)\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2}) \oplus Ind_{G(\{1,3\})\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2})$. Consideremos el carácter ϖ tal que $\varpi|_{\mathbb{Z}_2} = sgn$ y $\varpi|_{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2} = 1$; ocupando para la inducida el modelo izquierdo de Mackey, tenemos $Ind_{G(\{1,3\})\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2})$ isomorfo a $1 \oplus \beta$, donde $\beta = 1^\perp$. Considerando un vector $f \in Ind_{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2})$, tal que $\langle 1, f \rangle = 0$ e identificando f con el vector $f(D_8) \in \mathbb{C}^8$, se deduce $\beta = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)$.

Por otro lado, $Ind_{G(1)\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2}) \simeq sgn \oplus sgn^\perp$, más aún, el espacio $sgn^\perp \simeq \delta \oplus \delta^\perp$, con $\delta = (1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)$. Finalmente, al igual que en ejemplo anterior, podemos mostrar que la representación 2-dimensional $\pi = \delta^\perp$ es irreducible, tal que

$$\rho_\varpi = 1 \oplus sgn \oplus \delta \oplus \beta \oplus \pi, \tag{8}$$

es un modelo de Gelfand para el grupo D_8.
Para el caso general, sobre el número de vértices del n-ágono:

Proposición 3.1.2. *Sea X un espacio de Gelfand para $G = D_{2n}$, entonces, si n es impar $|X| = n + 1$ y si n es par $|X| = n + 2$.*

Demostración. Sea C_n el n-ágono regular y la acción natural de G sobre sus vértices I_n. Basta considerar los G-espacios siguientes:

- Caso n par. $X = I_n \cup \{X_1, X_2\}$, donde X_1 y X_2 son los dos $\frac{n}{2}$-ágonos, que surgen al colorear los nodos del n-ágono alternadamente con sólo dos colores. Es decir, $X_1 = \{1, 3, .., 2n - 1\}$ y $X_2 = \{2, 4, .., 2n\}$, con la acción $\sigma_g(X_i)$ definida por $\{g(x) : x \in X_i\}$, para $i = 1, 2$.

- Caso n impar. $X = I_n \cup \{b\}$, donde b es el baricentro del n-ágono. En este caso, la acción trivial sobre b, se define por $\sigma_g(b) = b, \forall g \in G$.

En el caso par, existen dos órbitas, a saber I_n y $\{X_1, X_2\}$, y los estabilizadores, son isomorfos (salvo conjugación) a $G_1 = \{1, s\} \simeq \mathbb{Z}_2$ y para $G_{X_1} = G_{X_2}$, $\langle r^2, s \rangle$ isomorfo a D_n, donde s es la reflexión que fija los nodos 1 y $\frac{n}{2} + 1$; y r la rotación en $\frac{2\pi}{n}$. En el otro caso, las órbitas son $G_1\{1, s\} \simeq \mathbb{Z}_2$ y $G_{\{b\}} = G$, donde s es la reflexión que fija el vértice 1 de C_n. $\square$

Proposición 3.1.3. *Sea $G = D_{2n}$. Los G-espacios X de la proposición (3.1.2), son espacios de Gelfand para el grupo G, según su paridad.*

3.2 Conjugación sobre involuciones

Lo anterior, nos permite identificar una correspondencia entre el cardinal del conjunto de involuciones de $G = D_{2n}$ y el cardinal de su espacio de Gelfand X. A suma, las involuciones del grupo, resultan ser otro modelo de Gelfand, dado por la acción de conjugación $\sigma_g(t) = gtg^{-1}, \forall g, t \in G$.

Observación 3.2.1. Si n es impar, existen dos órbitas, $\mathcal{O}_1 = \{1\}$ y $\mathcal{O}_s = \{sr^k : 1 \leq k < n\}$, donde s es la reflexión que fija el vértice 1. Luego, existen dos grupos de holonomía, a saber, $G(1) = G$ y $G(\{s\}) = \{1, s\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Como en el caso particular, consideramos el carácter ϖ de la forma $\varpi|_G = 1$ y $\varpi|_{\mathbb{Z}_2} = sgn$, cuyos grupos asociados a cada vértice coinciden, como en la acción natural del grupo diédrico.

Es fácil notar, que éste es un modelo de Gelfand, como

$$\rho_\varpi \simeq Ind_{G(1)\uparrow G}(\varpi|_G) \oplus Ind_{G(\{s\})\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2}), \tag{9}$$

utilizamos el teorema de Frobenius, sobre el carácter torcido por ϖ. Es decir:

$$\begin{aligned}\langle \rho_\varpi, \chi\rangle &= \langle Ind_{G(1)\uparrow G}(\varpi|_G), \chi\rangle + \langle Ind_{G(\{s\})\uparrow G}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2}), \chi\rangle \\ &= \langle (\varpi|_G), \chi\rangle + \langle (\varpi|_{\mathbb{Z}_2}), \chi\rangle \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{g\in G}(\varpi|_G)(g)\chi(g) + \frac{1}{2}\sum_{g\in\mathbb{Z}_2}(\varpi|_{\mathbb{Z}_2})(g)\chi(g),\end{aligned}$$

por elección de ϖ, tenemos $\langle \rho_\varpi, \chi\rangle = \frac{1}{2n}\sum_{g\in G}\chi(g) + \frac{1}{2}\sum_{g\in\mathbb{Z}_2} sgn(g)\chi(g)$, y al comparar con el carácter escogido, ϖ, tenemos $\langle \rho_\varpi, 1\rangle = \langle \rho_\varpi, sgn\rangle = 1$. Y para algún carácter de representación, de dimensión 2, χ_k, se concluye que $\langle \rho_\varpi, \chi_k\rangle = 1$, para $1 < k < \frac{n}{2}$. El caso par, se presenta en el siguiente resultado:

Proposición 3.2.2. *Sea $G = D_{2n}$ con n par, y $X = \{g \in G : g^2 = 1\}$ el conjunto de involuciones del grupo G, entonces X es un espacio de Gelfand para G.*

Demostración. Si s es la reflexión que fija los vértices 1 y $\frac{n}{2}+1$, y r la rotación en $\frac{2\pi}{n}$ grados de C_n. Existen cuatro órbitas, $\mathcal{O}_1 = \{1\}$, $\mathcal{O}_{r^{\frac{n}{2}}} = \{r^{\frac{n}{2}}\}$, $\mathcal{O}_s$ las involuciones que fijan dos vértices, y $\mathcal{O}_{sr}$ las que no fijan vértices, tales que $|\mathcal{O}_s| = |\mathcal{O}_{sr}| = \frac{n}{2}$. Entonces, salvo conjugación, existen 4 estabilizadores, cuyos tipos de holonomía son $G(1) = G(r^{\frac{n}{2}}) = G$ y $G(s) = G(sr) = \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ respectivamente. Como la restricción del carácter ϖ coincide en los grupos de isotropía conjugados, tenemos ρ_ϖ isomorfo a

$$1 \oplus sgn \oplus Ind_{H\uparrow G}(\varpi|_H) \oplus Ind_{K\uparrow G}(\varpi|_K),$$

donde $H = G(s)$, $K = G(sr)$, y ϖ es tal que $\varpi|_{G(1)} = 1$ y $\varpi|_{G(r^{\frac{n}{2}})} = sgn$. Para el caso $\frac{n}{2}$ par, consideramos $\varpi|_K = \alpha$ tal que $\alpha(r^k) = 1$ y $\alpha(sr^k) = -1$, si $k = 1, ..., n-1$; y $\varpi|_H = \beta$ donde $\beta(1) = \beta(sr) = 1$ y $\beta(r^{\frac{n}{2}}) = \beta(sr^{\frac{n}{2}+1})$. Finalmente, usando notación anterior, $\langle \rho_\varpi, \alpha\rangle = \langle \rho_\varpi, \beta\rangle = 1$; y si χ_k es el carácter de una representación 2-dimensional de G, entonces $\langle \rho_\varpi, \chi_k\rangle = 1$, para ambos casos de paridad. $\square$

3.3 Un ejemplo sobre el grupo del tetraedro

Como extensión de los modelos geométricos de representación por carácter de grupoide inducido, tenemos los grupos simétrico S_3 y S_4, que aparecen en los poliedros regulares. Por ejemplo, el grupo del tetraedro, un resultado conocido, sobre su grupo de simetría, determina que S_4 es suma semidirecta de los grupos S_3 y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 3.3.1. Si T es un tetraedro de nodos I_4, el grupo $G = S_4$ actúa naturalmente sobre ellos. Consideremos el G-conjunto $X = I_4 \cup \{a_1, a_2, a_3\}$, donde a_i aparece como el par de aristas opuestas del tetraedro, conteniendo el nodo i: definida la acción $\sigma_g(a_i) = \{g(k) : k \in a_i\}, \forall g \in G$. Es claro que, la acción no es transitiva, $|X| = 10$, y los grupos de isotropía asociados al grupoide $M(G, X)$ son $G(1) = \langle r_1, s_{14} \rangle \simeq S_3$ y el grupo G_{a_1} isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, donde r_1 es la rotación del tetraedro que fija el nodo 1, y s_{14} la reflexión que intercambia los nodos 2 y 3.

4 A modo de conclusión

En este tipo de construcción, existe una correspondencia explícita entre involuciones de un grupo simétrico, y su modelo de Gelfand. Aplicando, resultados de teoría de caracteres e inducción finita de Mackey, los grupos de holonomía, nos permiten descomponer la representación de grupo, en todas sus representaciones irreducibles, libre de multiplicidad. Así, generaliza resultados probados para grupos de tipo A_{n-1}, desde un ámbito geométrico a poliedros regulares, en la descomposición usual de sus simetrías. Sería importante, deducir en un estudio posterior, los casos de acción del grupo simétrico S_n, sobre su conjunto de involuciones, y proponer un análogo de Kodiyalam y Verma, en [4], sobre la acción signada.

Agradecimientos Agradezco a mi profesor, Dr. Jorge Soto Andrade, sus comentarios y conversaciones sobre el tema de esta investigación; resultado de un trabajo personal sobre grupoides y teoría de representaciones geométricas.

Gamaliel Cerda-Morales
Instituto de Matemáticas,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,
Blanco Viel 596, Cerro Barón
Valparaíso, Chile
gamaliel.cerda.m@mail.pucv.cl

Referencias

[1] H. Brandt, Ueber eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, Math. Ann., **96** (1926). pp. 360–366.

[2] R. Brown, From groups to groupoids: a brief survey, Bull. London Math. Soc., **19** (1987). pp. 113–134.

[3] A. Connes, Noncommutative geometry, Academic Press, New York, (1994).

[4] V. Kodiyalam and D. Verma, A natural representation model for the symmetric groups. Arxiv:math.RT/0402216 V1, 2006.

[5] J. Soto-Andrade, Geometric Gelfand Models, tensor quotients and Weil representations, In Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, **47**, (1987). pp. 306–316.

[6] J. Soto-Andrade, M. Aubert, Geometric Induction and Gelfand Models, preprint 2010.