Morfismos, Vol. 15, No. 2, 2011, pp. 1–8

La obra matemática de José Adem Chahín *

Alejandro Adem Díaz de León

2010 Mathematics Subject Classification: 55-02, 5506.
Keywords and phrases: José Adem Chahín, cuadrados de Steenrod, relaciones de Adem, Departamento de Matemáticas del Cinvestav.

Hasta 1940, las matemáticas en México eran únicamente para los aficionados; existán pocos matemáticos y la investigación era algo casi desconocido. Esto cambió en forma decisiva cuando Solomon Lefschetz comenzó una serie de visitas a la Ciudad de México. Matemático brillante y de un carácter indomable, puede decirse que él personalmente jugó un papel crítico en la aparición de matemáticos a nivel internacional en México. Su método fue sencillo: interesar a jóvenes en la investigación y posteriormente colocarlos como estudiantes de doctorado en Princeton y otras universidades de primer nivel en los Estados Unidos.

Así fue como José Adem Chahín, quien se interesaba en aspectos de álgebra y topología, fue a dar a Princeton. Una vez ahí, tuvo el acierto de escoger a Norman Steenrod como su asesor. Steenrod es considerado un gigante de la topología algebraica, una figura que cimentó esta disciplina como una de las más importantes de las matemáticas modernas. Adem estudió en Princeton alrededor del año 1950. Ésta era una época de esplendor en la topología: Lefschetz, Hopf, Hurewicz, Eilenberg, MacLane y Steenrod (entre otros) habían desarrollado las herramientas y conceptos formales, y el campo se hallaba colmado de problemas de gran relevancia y naturalidad, esperando ser atacados con esta nueva tecnología. En los años subsecuentes ocurrió una verdadera

*Basado en los artículos [1, 2] del autor escritos en ocasión de los homenajes *post mórtem* al Dr. José Adem Chahín. Se agradece el permiso del Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana y del Colegio Nacional por permitir la reproducción de partes de esos textos.

explosión de teoremas en la topología algebraica, con la tesis magistral de Serre y el trabajo de Borel, Thom, Milnor, Adams y Atiyah.

El trabajo de José Adem debe considerarse una contribución fundamental en este caudal del avance matemático. Es difícil exagerar la importancia de las "Relaciones de Adem" en la teoría de homotopía, no solamente por su trascendencia sino también por la influencia de estos resultados en el trabajo de otros. Como veremos posteriormente, la contribución de Adem sirvió como motivación para los métodos desarrollados por J. F. Adams, que hoy en día son la base de la homotopía estable.

A continuación haré un bosquejo del trabajo de José Adem, procurando evitar detalles técnicos con el fin de hacer accesible el material a aquellos que no son especialistas en la topología algebraica.

Un invariante calculable e importante de un espacio topológico X es su cohomología con coeficientes módulo 2. El funtor

$$X \to H^*(X, \mathbb{F}_2)$$

le asocia a un espacio X un espacio vectorial (sobre $\mathbb{F}_2$) con graduación natural. Estos grupos difieren de la homología en que poseen una estructura de álgebra graduada, es decir vienen dotados de un producto (suprimimos coeficientes de ahora en adelante):

$$\begin{gathered} H^p(X) \otimes H^q(X) \to H^{p+q}(X) \\ x \otimes y \to x \cup y. \end{gathered}$$

Es fácil convencerse de que la cohomología es un invariante más efectivo que la homología para distinguir espacios no homeomorfos o del mismo tipo de homotopía (por ejemplo, para distinguir $S^n \vee S^n \vee S^{2n}$ de $S^n \times S^n$).

Un problema central en la topología algebraica es el de entender las clases de homotopía de aplicaciones de un complejo X en otro Y, conjunto denotado por

$$[X, Y] = \left\{ \begin{array}{c} \text{clases de homotopía de funciones} \\ \text{continuas } f : X \to Y \end{array} \right\}.$$

En particular si $X = S^n$ (la esfera de dimensión n) y consideramos un punto base, se puede dotar a este conjunto de un producto, y obtenemos así

$$\pi_n(Y) = n\text{-ésimo grupo de homotopía de } Y.$$

Para analizar estos objetos matemáticos, Eilenberg y MacLane introdujeron espacios denotados por $K(\pi, n)$ donde π es un grupo abeliano (si $n > 1$) tales que

$$\pi_j(K(\pi,n)) \cong \begin{cases} \pi & \text{si} \quad j = n, \\ 0 & \text{si} \quad j \neq n. \end{cases}$$

La relevancia de estos espacios se sigue de la relación

$$H^n(Y,\pi) \cong [Y, K(\pi,n)],$$

es decir, estos espacios representan a la cohomología.

Distinguir el tipo de homotopía de un espacio o de una aplicación puede ser sumamente difícil, aun con el uso de la cohomología. Este proceso depende de propiedades homotópicas difícilmente detectables sin alguna estructura adicional.

Steenrood introdujo esta estructura adicional, en la forma de sus célebres "cuadrados de Steenrod". Los Sq^i son transformaciones naturales de funtores

$$H^n(\ \ ,\mathbb{F}_2) \to H^{n+i}(\ \ ,\mathbb{F}_2)$$

es decir, sí $f : X \to Y$ es continua, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y,\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^i} & H^{n+i}(Y,\mathbb{F}_2) \\ \big\downarrow f^* & & \big\downarrow f^* \\ H^n(X,\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^i} & H^{n+i}(X,\mathbb{F}_2) \end{array}$$

conmuta. Estos cuadrados satisfacen los siguientes axiomas, y son caracterizados por ellos:

1. Sq^i es un homomorfismo $\forall i \geq 0$.

2. Si $\dim x = n,\ \mathrm{Sq}^n x = x^2$, mientras que $\mathrm{Sq}^0(x) = x$.

3. Si $i > \dim x,\ \mathrm{Sq}^i x = 0$.

4. (Fórmula de Cartan)

$$\mathrm{Sq}^k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{Sq}^i x \cdot \mathrm{Sq}^{k-i} y.$$

La siguiente es una construcción homológica de los Sq^i. Sea X un espacio topológico, entonces $\mathbb{Z}_2$ actúa por permutación en el producto $X \times X$. Ahora sea $x \in H^n(X)$, representado por

$$f : C_*(X) \to \mathbb{F}_2 \qquad (f(u) = 0, \text{ si } u \notin C_n(X)).$$

En estas condiciones definimos

$$P : C^*(X) \to C^*(E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} (X \times X))$$

mediante

$$P(f)(w \otimes x_1 \otimes x_2) = \varepsilon(w) f(x_1) f(x_2)$$

donde $E\mathbb{Z}_2$ denota al $\mathbb{Z}_2$-espacio universal y $\varepsilon : C_*(E\,\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{F}_2$ la aumentación (nótese que esto se debe a que P es equivariante con respecto a la permutación anterior a nivel de cocadenas). Esto define una función natural

$$H^n(X) \to H^{2n}(E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} (X \times X))$$

tal que si $i : X \times X \to E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} (X \times X)$ es la inclusión de la fibra del haz asociado, entonces $i^* P(f) = f \times f \in H^{2n}(X \times X)$.

Por otro lado la inclusión de puntos fijos $j : X \to X \times X$ induce

$$j^*_{\mathbb{Z}_2} : H^{2n}(E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} (X \times X)) \to H^{2n}(B\mathbb{Z}_2 \times X)$$

donde $B\mathbb{Z}_2$ denota al espacio clasificante. Por definición,

$$j^* P x = \sum_{j=0}^{n} e^{n-j} \otimes \mathrm{Sq}^j x$$

donde $H^*(B\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{F}_2[e]$, con $\dim e = 1$.

Serre introdujo el concepto de operaciones cohomológicas como transformaciones naturales de funtores

$$\epsilon\colon H^n(\ ,A) \to H^q(\ ,B)$$

y demostró que éstas corresponden en forma biunívoca con elementos del grupo

$$H^q(K(A,n),B) \cong [K(A,n), K(B,q)].$$

Si X es un espacio y

$$g_x : X \to K(A,n)$$

representa a $x \in H^n(X, A)$, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \{id\} & & H^n(K(A,n),A) & \xrightarrow{g_x^*} & H^n(X,A) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon(K(A,n))} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon(X)} \\ \alpha & & H^q(K(A,n),B) & \xrightarrow[g_x^*]{} & H^q(X,B) \end{array}$$

El elemento $\epsilon(K(A,n))(id) \in H^q(K(A,n),B)$ representa a la operación ϵ. Serre demostró que las operaciones estables[1] (es decir que conmutan con la suspensión y así dan lugar a homomorfismos) forman un álgebra, generada por los Sq^i, la denominada álgebra de Steenrod, $A(2)$. Esto significa que la estructura adicional, que generaliza al producto, está contenida totalmente en el álgebra de Steenrod. Ante esto es evidente que conocer las relaciones globales entre estas operaciones es de singular importancia, ya que repercutirán en la cohomología de cualquier complejo. En 1951, José Adem obtuvo una colección completa de relaciones entre los Sq^i. La formula exacta, conocida como las Relaciones de Adem, es la siguiente (los coeficientes binomiales se reducen módulo 2): Para $0 < a < 2b$,

$$\mathrm{Sq}^a\mathrm{Sq}^b = \sum_{0 \le c \le a/2} \binom{b-c-1}{a-2c} \mathrm{Sq}^{a+b-c}\mathrm{Sq}^c.$$

Adem también obtuvo relaciones parecidas entre las operaciones cohomológicas correspondientes a primos impares. Preferible a discutir la demostración, mencionaré algunas aplicaciones inmediatas.

Teorema 1 (Adem)**.** Sq^n *es factorizable si y solamente si n no es una potencia de 2; es decir los* Sq^{2^i} *generan el álgebra* $A(2)$*.*

Corolario 2. *Si $x \in H^q(X)$ con $x^2 \neq 0$, entonces existe alguna i tal que $0 < 2^i \le q$ y $\mathrm{Sq}^{2^i}x \neq 0$.*

Demostración. $0 \neq x^2 = \mathrm{Sq}^q x = \sum$ monomios en $\mathrm{Sq}^{2^i}x$. □

Corolario 3. *Si $H^*(X)$ es un anillo polinomial o un anillo polinomial truncado generado por $x \in H^q(X)$ y $x^2 \neq 0$, entonces $q = 2^k$ para alguna k.*

[1] En el caso $A = B = \mathbb{F}_2$.

Demostración. Como $H^*(X)$ es polinomial, $H^{q+2^i}(X) = 0$ para $0 < 2^i < q$, de modo que $\mathrm{Sq}^{2^i}x = 0$ para $0 < 2^i < q$. El corolario anterior implica que $q = 2^k$. $\square$

Ahora consideraremos algunas aplicaciones concretas de estos resultados. Dada una función continua $f : S^{2n-1} \to S^n$, construimos el complejo

$$X_f = S^n \cup_f e^{2n}$$

tal que

$$H^*(X_f) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & * = 0, n, 2n, \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

El invariante de Hopf módulo 2 de f, denotado por $H(f)$, se define mediante la relación

$$a^2 = H(f) \cdot b$$

donde a y b denotan generadores de $H^n(X_f)$ y $H^{2n}(X_f)$, respectivamente. Una pregunta clásica de la topología es la de saber para qué valores de n existe un mapeo f con $H(f) \neq 0$. La importancia de este problema puede verse por su relación a un problema algebraico: ¿Para qué valores de n admite $\mathbb{R}^n$ una estructura de álgebra de división? Esta segunda propiedad implica la existencia de un mapeo f con $H(f) \neq 0$ (se usa

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{\text{multiplicación}} \mathbb{R}^n - \{0\} \xrightarrow{\text{normalización}} S^{n-1}$$

y una construcción de Hopf para obtener

$$f : S^{2n-1} = S^{n-1} * S^{n-1} \to \Sigma S^{n-1} = S^n).$$

Por otro lado la existencia de tal f es equivalente a la existencia de una estructura de "grupo salvo homotopía" (H-espacio) en S^{n-1}. Además, si S^{n-1} tiene estructura de H-espacio, entonces es paralelizable. Los resultados de Adem implican:

Teorema 4 (Adem). *Los únicos valores de n para los que alguna de las siguientes condiciones puede suceder son de la forma $n = 2^k$, $k \geq 0$:*

1. *Existe $f : S^{2n-1} \to S^n$ con $H(f) \neq 0$.*
2. *$\mathbb{R}^n$ admite estructura de álgebra de división.*
3. *S^{n-1} tiene estructura de H-espacio.*

4. S^{n-1} es paralelizable.

Estos resultados son un modelo del poder de la topología algebraica cuando se aplica a ciertos problemas geométricos. Inspirado por los resultados de Adem, J. F. Adams extendió este teorema en forma notable, obteniendo una de las más impresionantes aplicaciones de métodos algebraicos en la topología hasta la fecha:

Teorema 5 (Adams)**.** *En el teorema anterior n sólo puede ser* 1, 2, 4, *u* 8*. En* (2) *se tienen los reales, complejos, cuaternios y octonios de Cayley, respectivamente.*

La demostración del teorema de Adams utiliza de forma esencial las operaciones cohomológicas, en particular la noción de operaciones secundarias introducidas por Adem.

Quizás más importante que el resultado fue la herramienta que Adams introdujo (la sucesión espectral de Adams) para calcular clases de homotopía a partir de la cohomología como módulo sobre el álgebra de Steenrod. La idea seminal de esta revolucionaria técnica radica en los resultados descritos anteriormente, y el trabajo de Adem fue una fuente importante de motivación.

Podemos concluir observando que los resultados de Adem no solamente son de interés general, sino que de hecho representan un trayecto fundamental en la evolución de la teoría de la homotopía a su estado actual. Además, su visión clara y bien determinada de lo que debe ser el trabajo en matemáticas y su deseo de materializar en México un modelo de desarrollo del área de la matemática se hizo patente en su labor como iniciador, a partir de 1956, de la II Serie del Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, y como editor de dicha publicación desde entonces hasta su fallecimiento. El propósito de esta revista ha sido proporcionar a los matemáticos mexicanos y extranjeros un medio para publicar en México los resultados de sus investigaciones, con el nivel de una revista internacional de prestigio.

Alejandro Adem Díaz de León
Departamento de Matemáticas,
Universidad de la Columbia Británica,
Vancouver, Canada.

Referencias

[1] Adem A., *Las relaciones de Adem*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (2) **36** (1991) 1-5.

[2] Adem A., *Las relaciones de Adem en la topología algebraica*, Obra Matemática de José Adem, El Colegio Nacional, 1992, xii–xix, ISBN 968-6664-59-7.

[3] Adem J., *The relations on Steenrod powers of cohomology classes*, Algebraic Geometry and Topology (a symposium in honor of Solomon Lefschetz), Princeton University Press, Princeton NJ, 1957.

[4] Steenrod N. E.; Epstein D., Cohomology Operations, Annals of Mathematics Studies **50**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1962.

[5] Whitehead G. W., *Fifty years of homotopy theory*, Bulletin of the American Mathematical Society **8** No. 1 (1983), 1–29.