Morfismos, Vol. 13, No. 1, 2009, pp. 17–44

Algunas álgebras C^* y su K-teoría *

Blanca Estela Bravo Silverio

Resumen

La idea básica de la K-teoría para álgebras C^* es asociar a cada álgebra C^* $\mathcal{A}$ dos grupos abelianos, $K_0(\mathcal{A})$ y $K_1(\mathcal{A})$, los cuales reflejan propiedades importantes de $\mathcal{A}$. La K-teoría C^* algebraica tiene un comportamiento funtorial covariante y es invariante bajo homotopías.

En este trabajo se calcula la K-teoría del álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$, utilizando la sucesión exacta larga de 6 términos inducida por K_0 y K_1. También se calcula el grupo K_0 de K-teoría del álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$.

2000 Mathematics Subject Clasification: 16E20, 47L30 , 47L80.
Keywords and phrases: K-teoría, álgebra de Cuntz, álgebra de Toeplitz.

1. Introducción

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, denotamos por $K_0(\mathcal{A})$ al grupo de Groethendieck del semigrupo abeliano de clases de equivalencia estable en el conjunto de proyecciones en $M_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup M_n(\mathcal{A})$. Sea $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ y $S(\mathcal{A}) = \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{A} : f \text{ continua}, \ \ f(1) = 0\}$, los grupos de K-teoría superior están definidos de la siguiente manera $K_n(\mathcal{A}) := K_0(S^n\mathcal{A})$, donde $S^n\mathcal{A} = S(S^{n-1}\mathcal{A})$.

Algunas referencias sobre K-teoría de álgebras C^* son el libro de Rørdam [9] y el libro de Blackadar [2], este último es el que usamos para el Teorema de periodicidad de Bott, el cuál plantea que $K_n(\mathcal{A}) \cong K_{n+2}(\mathcal{A})$ para toda álgebra C^* $\mathcal{A}$.

---

* **Este trabajo es parte de la tesis de maestría de la autora realizada en el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV.**

Dos de los ejemplos más importantes de álgebras de operadores son el álgebra de Cuntz y el álgebra de Toeplitz. En este trabajo se calculan los grupos de K-teoría para estas álgebras.

Sea H un espacio de Hilbert, denotemos por $B(H)$ al espacio de operadores lineales y acotados de H. Supongamos que H es separable con base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ y sea $S \in B(H)$ definido por $S(e_n) = e_{n+1}$. El álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$ es el álgebra C^* generada por S. Para calcular los grupos de K-teoría de $\mathcal{T}$, se demuestra que el ideal de operadores compactos $\mathcal{K}$ está contenido en $\mathcal{T}$ y que la imagen de S en el álgebra de Calkin $\mathcal{Q}(H) := \mathcal{T}/\mathcal{K}$, denotada por $\pi(S)$, es un elemento normal en $\mathcal{Q}(H)$. Siendo $\pi(S)$ un generador normal para $\mathcal{Q}(H)$ tenemos que $\mathcal{Q}(H) \cong C(\sigma(\pi(S)))$, donde $\sigma(\pi(s))$ es el espectro de $\pi(S)$.

Lo anterior da origen a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C(\sigma(\pi(S))) \longrightarrow 0\ ,$$

la cuál induce una sucesión exacta larga que nos permite conocer los grupos de K-teoría del álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$ si se conocen previamente los grupos de K-teoría de $\mathcal{K}$ y $C(\sigma(\pi(S)))$.

En [6] Joachim Cuntz describe el álgebra C^* universal generada por un conjunto de isometrías $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ con la propiedad $\sum S_i S_i^* = I$ si $n \in \mathbb{N}$ o $\sum_{i \leq r} S_i S_i^* \leq I$ con $r \in \mathbb{N}$ si $n = \infty$. Esta álgebra se llama álgebra de Cuntz y se denota por $\mathcal{O}_n$. En [5] se estudia la relación de equivalencia de Murray-von Neumann en las álgebras de Cuntz. Y se demuestra que el orden de $[I]_0$, que es la clase de la identidad del álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$ en el grupo $K_0(\mathcal{O}_n)$, es $n-1$. Posteriormente, en [4] se demuestra que el grupo de elementos unitarios de $\mathcal{O}_n$ es conexo y utilizando el Teorema de Periodicidad de Bott se demuestra que $K_1(\mathcal{O}_n) = \{0\}$.

En los artículos de Cuntz, los grupos de K-teoría se describen en base a las propiedades de las álgebras simples. En el presente trabajo primero se da una descripción de los grupos de K-teoría para cualquier álgebra C^* y posteriormente se trabaja con las propiedades básicas de las álgebras de Cuntz para el cálculo del grupo $K_0(\mathcal{O}_n)$. La idea básica de la demostración de que $K_0(\mathcal{O}_n)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{n-1}$ es acotar el orden de $K_0(\mathcal{O}_n)$ por $n-1$ y después demostrar que todo elemento de $K_0(\mathcal{O}_n)$ es de la forma $k[1]_0$, donde $[1]_0$ es la clase de la identidad en el grupo $K_0(\mathcal{O}_n)$ y k es un entero, además el orden de $[1]_0$ es exactamente $n-1$.

En este trabajo se utilizan herramientas y propiedades básicas del álgebra de Toeplitz y del álgebra de Cuntz para calcular sus grupos de K-teoría.

2. Preliminares

Es posible asociar a cada semigrupo abeliano un grupo abeliano tal como se obtienen los enteros de los números naturales. En [1], sección 8.1, puede encontrar una descripción detallada de la construcción de este grupo, llamado el grupo de Grothendieck.

Sea $(S, +)$ un semigrupo abeliano. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ en $S \times S$ por $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si existe $z \in S$ tal que $x_1 + y_2 + z = y_1 + x_2 + z$.

Denotamos por $\mathcal{G}(S)$ al cociente $S \times S/\sim$ y por $[x, y]$ a la clase de equivalencia de (x, y). La operación

$$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$$

está bien definida e implica que $(\mathcal{G}(S), +)$ es un grupo abeliano. Observe que $-[x, y] = [y, x]$ y que $[x, x] = 0$ para todo $x, y \in S$.

El grupo $\mathcal{G}(S)$ se llama el *grupo de Grothendieck* de S.

Sea $y \in S$ fijo, definamos la función

$$\gamma_S : S \to \mathcal{G}(S), \quad x \mapsto [x + y, y].$$

Esta función es aditiva e independiente de la elección de y. La función γ_S se llama la *función de Grothendieck.*

El semigrupo $(S, +)$ se dice que tiene la *propiedad de cancelación* si, dados $x, y, z \in S$ con $x + z = y + z$, se sigue que $x = y$.

Proposición 2.1.1 *El grupo de Grothendieck tiene las siguientes propiedades.*

(i) Propiedad universal. *Si H es un grupo abeliano y si $\varphi : S \to H$ es una función aditiva, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\psi : \mathcal{G}(S) \to H$ que hace al diagrama*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & H \\ \mathcal{G}(S) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

conmutativo.

(ii) Funtorialidad. *Para cada función aditiva $\varphi : S \to T$ entre semigrupos S y T existe un homomorfismo de grupos $\mathcal{G}(\varphi) : \mathcal{G}(S) \to \mathcal{G}(T)$ que hace al diagrama*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & T \arrow[d, "\gamma_T"] \\ \mathcal{G}(S) \arrow[r, "\mathcal{G}(\varphi)"'] & \mathcal{G}(T) \end{tikzcd}$$

conmutativo.

(iii) $\mathcal{G}(S) = \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x, y \in S\}$.

(iv) *Sean $x, y \in S$. Entonces $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$ si y sólo si $x + z = y + z$ para algún $z \in S$.*

(v) *La función de Grothendieck $\gamma_S : S \to \mathcal{G}(S)$ es inyectiva si y sólo si S tiene la propiedad de cancelación.*

(vi) *Sea $(H, +)$ un grupo abeliano, y sea S un subconjunto no vacío de H. Si S es cerrado bajo la suma, entonces $(S, +)$ es un semigrupo abeliano con la propiedad de cancelación. El grupo $\mathcal{G}(S)$ es isomorfo al subgrupo H_0 generado por S y $H_0 = \{x - y : x, y \in S\}$.*

2.2. K-teoría en álgebras C^*

Los resultados de esta sección se encuentran en [2] y en [9].

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, una proyección $E \in \mathcal{A}$ es un elemento autoadjunto, $E = E^*$, e idempotente, $E = E^2$. Se denota por $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ al conjunto de proyecciones de $\mathcal{A}$. Sean $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, se dice que E es Murray-von Neumann equivalente a F, se escribe $E \sim F$, si existe $V \in \mathcal{A}$ tal que $E = V^*V$ y $F = VV^*$. No es difícil demostrar que la equivalencia de Murray-von Neumann es una relación de equivalencia.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $M_n(\mathcal{A})$ el álgebra de matrices $n \times n$ con entradas en $\mathcal{A}$. El álgebra $M_n(\mathcal{A})$ es un álgebra C^* con la norma $\|(A_{ij})\| := \sup\|\varphi'(A_{ij})\|$, donde

$$\begin{aligned} \varphi' : M_n(\mathcal{A}) &\longrightarrow B(H^n) \\ (A_{ij}) &\longmapsto (\varphi(A_{ij})) \end{aligned}$$

y (φ, H), $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow B(H)$, es la representación universal[1] de $\mathcal{A}$.

[1] Véase [10], página 94.

Sea $\mathcal{P}_n(\mathcal{A}) := \mathcal{P}(M_n(\mathcal{A}))$. Para

$$\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathcal{A}),$$

se define la relación de equivalencia $\sim_0$ de la siguiente manera. Sean $E \in \mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ y $F \in \mathcal{P}_m(\mathcal{A})$, $E \sim_0 F$ si existe $V \in M_{n,m}(\mathcal{A})$ tal que $E = V^*V$ y $F = VV^*$. Aquí $M_{n,m}(\mathcal{A})$ es la $*$-álgebra de matrices $n \times m$ con entradas en $\mathcal{A}$. Claramente la relación $\sim_0$ restringida a $\mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ coincide con la equivalencia de Murray-von Neumann.

Definamos una operación binaria en $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \oplus : \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}) \times \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}) \ , \\ (E,F) &\longmapsto E \oplus F \end{aligned}$$

donde

$$E \oplus F = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}.$$

De la definición de $\oplus$ se deduce fácilmente la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $E, F, G, E', F' \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$, entonces*

i) *$E \sim_0 E \oplus 0_n$ donde 0_n es la identidad aditiva de $M_n(\mathcal{A})$.*

ii) *Si $E \sim_0 E'$ y $F \sim_0 F'$ entonces $E \oplus F \sim_0 E' \oplus F'$.*

iii) *$E \oplus F \sim_0 F \oplus E$.*

iv) *Si $E, F \in \mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ son tales que $EF = 0$, entonces $E + F \in \mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ y $E + F \sim_0 E \oplus F$.*

v) *$(E \oplus F) \oplus G = E \oplus (F \oplus G)$.*

Para cualquier álgebra C^* $\mathcal{A}$ se tiene que $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})/\sim_0$ es un semigrupo abeliano.

Sea

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})/\sim_0 \ . \tag{1}$$

Denotemos por $[E]_\mathcal{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ a la clase de equivalencia que contiene a $E \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$. Definimos la operación suma sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ como sigue,

$$[E]_\mathcal{D} + [F]_\mathcal{D} = [E \oplus F]_\mathcal{D}.$$

Por la Proposición 2.2.1, la operación "+" está bien definida y $(\mathcal{D}(\mathcal{A}), +)$ es un semigrupo abeliano.

El grupo $K_0(\mathcal{A})$ se define como el grupo de Grothendieck de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$,

$$K_0(\mathcal{A}) := \mathcal{G}(\mathcal{D}(\mathcal{A})).$$

Sea $[\cdot]_0 : \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{A})$ la función definida por

$$[E]_0 = \gamma([E]_{\mathcal{D}}) \in K_0(\mathcal{A}),\ E \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}), \tag{2}$$

donde $\gamma := \gamma_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{A})$ es la función de Grothendieck.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad. Entonces

$$\begin{aligned} K_0(\mathcal{A}) &= \{[E]_0 - [F]_0 : E, F \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})\} \\ &= \{[E]_0 - [F]_0 : E, F \in \mathcal{P}_n(\mathcal{A}), n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Sea X un espacio topológico, decimos que dos puntos $a, b \in X$ son *homotópicos* en X, $a \sim_h b$ en X, si existe una función continua $\upsilon : [0,1] \to X$ tal que $\upsilon(0) = a$ y $\upsilon(1) = b$. La relación $\sim_h$ se llama equivalencia homotópica.

Proposición 2.2.2 *El grupo $K_0(\mathcal{A})$ tiene las siguientes propiedades.*

(i) $[E \oplus F]_0 = [E]_0 + [F]_0$ *para todas las proyecciones E, F en $\mathcal{P}_\infty$.*

(ii) $[0_\mathcal{A}]_0 = 0$, *donde $0_\mathcal{A}$ es la proyección cero en $\mathcal{A}$.*

(iii) *Si E, F están en $\mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ para algún n y $E \sim_h F$ en $\mathcal{P}_n(\mathcal{A})$, entonces* $[E]_0 = [F]_0$.

(iv) *Si E, F son proyecciones mutuamente ortogonales en $\mathcal{P}_n(\mathcal{A})$, entonces* $[E + F]_0 = [E]_0 + [F]_0$.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con identidad, y sea $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un $*$-homomorfismo. El homomorfismo φ se puede extender a un $*$-homomorfismo $\varphi : M_n(\mathcal{A}) \longrightarrow M_n(\mathcal{B})$, para cada n, de la siguiente manera:

$$\varphi(A_{ij})_{i,j=1}^n = (\varphi(A_{ij}))_{i,j=1}^n. \tag{4}$$

Puesto que la imagen de una proyección bajo un $*$-homomorfismo es una proyección, $\varphi(\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})) \subset \mathcal{P}_\infty(\mathcal{B})$. Luego, se define $k_0(\varphi) : K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathcal{B})$ como $k_0(\varphi)[E]_0 = [\varphi(E)]_0$ para $E \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$. De la Ecuación (3), $k_0(\varphi)$ está bien definido para todo $g \in K_0(\mathcal{A})$.

El funtor K_0 es un *funtor covariante* de la categoría de álgebras C^*, donde los morfismos son los $*$-homomorfismos, a la categoría de grupos abelianos con los homomorfismos de grupos. En categorías, es común denotar por φ_* al morfismo inducido por un funtor covariante. La razón de que nosotros denotemos por $k_0(\varphi)$ al morfismo inducido por K_0 es que en álgebras C^* existe una involución denotada por $*$. Algunos autores denotan a $k_0(\varphi)$ por $K_0(\varphi)$. Hemos decidido usar la letra k para hacer notar la diferencia entre el objeto y el morfismo.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y X un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto. Sea $C_0(X, \mathcal{A})$ el conjunto

$$\begin{aligned}(5) \quad & \{f \in C(X, \mathcal{A}) \mid \\ & \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists K \subset X \text{ compacto con } \|f(x)\| \leq \varepsilon\ \forall\, x \in X \backslash K\}.\end{aligned}$$

El n-ésimo grupo de K-teoría de un álgebra C^* $\mathcal{A}$ se define como

$$K_n(\mathcal{A}) := K_0(S^n \mathcal{A}),$$

donde $S\mathcal{A}$ es la suspención de $\mathcal{A}$:

$$S\mathcal{A} := \{f \in C(\mathbb{T}, \mathcal{A}) | f(1) = 0\} \cong C_0((0,1), \mathcal{A})$$

y $S^n\mathcal{A} := S(S^{n-1}\mathcal{A})$.

Existe otra forma de calcular el grupo $K_1(\mathcal{A})$ de un álgebra C^* $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad 1. Denotamos al grupo de elementos unitarios de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{U}(\mathcal{A})$. Sea $\mathcal{U}_0(\mathcal{A})$ el conjunto de todos los $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ tal que $u \sim_h 1$ en $\mathcal{U}(\mathcal{A})$. Es fácil demostrar que

i) Para cada elemento autoadjunto $h \in \mathcal{A}$, $exp(ih) \in \mathcal{U}_0(\mathcal{A})$.

ii) Si u es un elemento unitario en $\mathcal{A}$ con $\sigma(u) \neq \mathbb{T}$, entonces $u \in \mathcal{U}_0(\mathcal{A})$.

Si $u, v \in \mathcal{U}_0(\mathcal{A})$, entonces existen trayectorias $t \mapsto u_t$, $s \mapsto v_s$ que unen u y v con la identidad respectivamente. La trayectoria producto $t \mapsto u_t v_t$ une uv con la identidad. Además, la trayectoria $t \mapsto u_t^{-1}$ es continua y une u^{-1} con la identidad. Así $\mathcal{U}_0(\mathcal{A})$ es un subgrupo de $\mathcal{U}(\mathcal{A})$.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos álgebras C^* con identidad y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un $*$-homomorfismo sobreyectivo. Entonces

iii) $\varphi(\mathcal{U}_0(\mathcal{A})) = \mathcal{U}_0(\mathcal{B})$.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $\mathcal{U}_n(\mathcal{A})$ al conjunto de elementos unitarios del álgebra $M_n(\mathcal{A})$, esto es

$$\mathcal{U}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{U}(M_n(\mathcal{A})). \tag{6}$$

Sea $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(\mathcal{A})$.

Definamos la operación $\oplus$ en $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$ de la siguiente manera

$$u \oplus v = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{n+m}(\mathcal{A}),$$

con $u \in \mathcal{U}_n(\mathcal{A})$ y $v \in \mathcal{U}_m(\mathcal{A})$. Claramente $\oplus$ es asociativa, es decir $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ para cualesquiera $u, v, w \in \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$.

Denotaremos por 1_r a la identidad en $M_r(\mathcal{A})$ y $u \oplus 1_0 = u$ para cualquier $u \in \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$.

Ahora definamos la relación $\sim_1$ como sigue. Para $u \in \mathcal{U}_n(\mathcal{A})$ y $v \in \mathcal{U}_m(\mathcal{A})$, se escribe $u \sim_1 v$ si existe un número natural $k \geq \text{máx}\{n, m\}$ tal que $u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m}$ en $\mathcal{U}_k(\mathcal{A})$.

Es claro que $\sim_1$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$. Además

i) $u \sim_1 u \oplus 1_n$ para todo $u \in \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$ y $n \in \mathbb{N}$,

ii) si $u, v \in \mathcal{U}_n(\mathcal{A})$ para algún n, entonces $uv \sim_1 vu \sim_1 u \oplus v$,

iii) $u \oplus v \sim_1 v \oplus u$ para cualesquiera $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$,

iv) si $u, u', v, v' \in \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$ con $u \sim_1 u'$ y $v \sim_1 v'$, entonces $u \oplus v \sim_1 u' \oplus v'$.

Para cada álgebra C^* $\mathcal{A}$ se define

$$K_1(\mathcal{A}) = \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A}) / \sim_1, \tag{7}$$

Si $\tilde{\mathcal{A}}$ denota la unitalización[2] del álgebra $\mathcal{A}$ es fácil demostrar que $K_1(\tilde{\mathcal{A}}) = K_1(\mathcal{A})$. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* sin identidad, el grupo $K_1(\mathcal{A})$ se define como $K_1(\tilde{\mathcal{A}})$.

Denotemos por $[u]_1$ a la clase de equivalencia de $u \in \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$. Definimos la operación $+$ en $K_1(\mathcal{A})$ por

$$[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1,$$

donde $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$.

La operación $+$ está bien definida, es asociativa, conmutativa y tiene como elemento neutro a $[1]_1$. El grupo $(K_1(\mathcal{A}), +)$ es un grupo abeliano donde $-[u]_1 = [u^*]_1$ para cada $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{\mathcal{A}})$.

[2]Véase [11], sección 15.1

Lema 2.2.3 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, G un grupo abeliano y ν una función de $\mathcal{U}_\infty(\tilde{\mathcal{A}})$ en G con las siguientes propiedades*

1. $\nu(u \oplus v) = \nu(u) + \nu(v)$,
2. $\nu(1) = 0$,
3. *si* $u, v \in \mathcal{U}_n(\tilde{\mathcal{A}})$ *con* $u \sim_h v$ *en* $\mathcal{U}_n(\mathcal{A})$ *entonces* $\nu(u) = \nu(v)$.

Entonces existe un único homomorfismo de grupos $\alpha : K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow G$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_\infty(\tilde{\mathcal{A}}) \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_1(\mathcal{A}) \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras C^* con identidad, y sea $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un $*$-homomorfismo unitario ($\varphi(1_\mathcal{A}) = 1_\mathcal{B}$). Entonces φ induce un $*$-homomorfismo unitario $\varphi : M_n(\mathcal{A}) \longrightarrow M_n(\mathcal{B})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Con esto, obtenemos una función $\varphi : \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{U}_\infty(\mathcal{B})$ y definimos

$$\nu : \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A}) \longrightarrow K_1(\mathcal{B})$$

por $\nu(u) = [\varphi(u)]_1$ para cada $u \in \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$. Es inmediato ver que existe un homomorfismo de grupos $k_1(\varphi) : K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow K_1(\mathcal{B})$ tal que

$$k_1(\varphi)([u]_1) = [\varphi(u)]_1, \qquad u \in \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A}). \tag{8}$$

Podemos resumir las propiedades de la K-teoría para álgebras C^* como sigue

1. Continuidad: para cada sucesión inductiva de álgebras C^*

   $$\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots$$

   con límite inductivo $(\mathcal{A}, \{\mu_n\})$, existe un isomorfismo entre $K_0(\mathcal{A})$ y G, donde G es el límite inductivo de

   $$K_0(\mathcal{A}_1) \xrightarrow{k_0(\varphi_1)} K_0(\mathcal{A}_2) \xrightarrow{k_0(\varphi_2)} \cdots .$$

2. Funtorialidad Covariante: un $*$-homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ induce un homomorfismo de grupos $k_n(\varphi) : K_n(\mathcal{A}) \longrightarrow K_n(\mathcal{B})$.

3. Invariancia homotópica: Si φ es una equivalencia homotópica, entonces cada $k_n(\varphi)$ es un isomorfismo.

4. Periodicidad de Bott: para cada n, se tiene un isomorfismo natural $K_{n+2}(X) \cong K_n(X)$.

5. Excisión: cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A} \xrightarrow{\psi} \mathcal{B} \longrightarrow 0 \tag{9}$$

da origen a la sucesión exacta cíclica.

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathcal{I}) \arrow[r] & K_0(\mathcal{A}) \arrow[r] & K_0(\mathcal{B}) \arrow[d] \\ K^1(\mathcal{B}) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(\mathcal{A}) \arrow[l] & K_1(\mathcal{I}) \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{10}$$

La función $\delta_1 : K_1(\mathcal{B}) \longrightarrow K_0(\mathcal{I})$ se llama la función de índice.

Esta función se construye de la siguiente manera. Sea

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\iota"] & \tilde{\mathcal{A}} \arrow[r, shift left, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

donde ι es la función inclusión, $\pi(a, \alpha) = \alpha$ y $\lambda(\alpha) = (0, \alpha)$. Sea $s = \lambda \circ \pi : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$. Para cada $x \in \mathcal{A}$ se tiene que $s(x) = 0$. Si $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un $*$-homomorfismo entre álgebras C^* y $\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ su extensión unitaria, entonces $\tilde{\phi}(x, \lambda) = (\phi(x), \lambda)$ y

$$s(\tilde{\phi}(a)) = s(a), \quad \forall a \in \tilde{\mathcal{C}}.$$

Si tenemos la sucesión exacta (9) entonces

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(x) = s(x) = s(\tilde{\varphi}(x)), \ \forall x \in \tilde{I}.$$

Luego $a \in \tilde{\mathcal{A}}$ está en la imagen de $\tilde{\varphi}$ si y sólo si $\tilde{\psi}(a) = s(\tilde{\psi}(a))$.

Lema 2.2.4 *Consideremos la sucesión exacta corta (9) y sea $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{\mathcal{B}})$, entonces existen $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{\mathcal{A}})$ y $p \in \mathcal{P}_{2n}(\tilde{I})$ tales que*

$$\tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \tilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*, s(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

los elementos v y p son únicos en el sentido que, si $w \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{\mathcal{A}})$, $q \in \mathcal{P}_{2n}(\tilde{I})$ satisfacen las mismas condiciones que v y p entonces $s(q) = s(p)$ y $p \sim q$ en $\mathcal{P}_{2n}(\tilde{\mathcal{I}})$.

La función $\nu : \mathcal{U}_\infty(\tilde{\mathcal{B}}) \longrightarrow K_0(\mathcal{I})$ definida por $\nu(u) = [p]_0 - [s(p)]_0$, donde p es como en el Lema 2.2.4, está bien definida y satisface las condiciones del Lema 2.2.3. Así existe un homomorfismo de grupos $\delta_1 : K_1(\mathcal{B}) \longrightarrow K_0(\mathcal{I})$ que hace al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_\infty(\tilde{\mathcal{B}}) \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
K_1(\mathcal{B}) \arrow[r, "\delta_1"'] & K_0(\mathcal{I})
\end{tikzcd}$$

La K-teoría C^* algebraica tiene la propiedad adicional

- Estabilidad: para cualquier n se tiene un isomorfismo natural $K_m(M_n(\mathcal{A})) \cong K_m(\mathcal{A})$.

Esta última propiedad, junto con la continuidad de K_0, nos permite conocer los grupos de K-teoría del álgebra de operadores compactos $\mathcal{K}$ sobre un espacio de Hilbert ya que $\mathcal{K}$ es el límite inductivo de la sucesión de matrices con entradas complejas $M_n(\mathbb{C})$. De esta manera

$$K_0(\mathcal{K}) \cong K_0(\mathbb{C}), \tag{11}$$

$$K_1(\mathcal{K}) \cong K_1(\mathbb{C}). \tag{12}$$

Es sencillo demostrar que $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ y que $K_1(\mathbb{C}) \cong 0$.

Sea $C_0(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}) = \{f \in C(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}) |\, \text{lím}_{|x|\to\infty} \|f(x)\| = 0\}$. Como $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $(0,1)$ podemos escribir la suspensión de un álgebra C^* $\mathcal{A}$ como

$$S\mathcal{A} = C_0((0,1), \mathcal{A}) \cong C_0(\mathbb{R}, \mathcal{A}).$$

Cuando $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ escribiremos $C_0(X)$ para $C_0(X, \mathbb{C})$.

Si X y Y son espacios topológicos Hausdorff, localmente compactos, claramente $C_0(X, C_0(Y)) \cong C_0(X \times Y)$. En consecuencia, $S^n(\mathbb{C}) = C_0(\mathbb{R}, S^{n-1}(\mathbb{C})) = C_0(\mathbb{R}^n)$.

Como $K_n(\mathbb{C}) := K_0(S^n(\mathbb{C}))$ y $K_{n+1}(\mathbb{C}) = K_1(S^n(\mathbb{C}))$ se sigue que $K_n(\mathbb{C}) = K_0(C_0(\mathbb{R}^n))$ y $K_{n+1}(\mathbb{C}) = K_1(C_0(\mathbb{R}^n))$.

Por el Teorema de periodicidad de Bott se cumple que $K_{2n+1}(\mathbb{C}) = K_1(\mathbb{C})$ y $K_{2n}(\mathbb{C}) = K_0(\mathbb{C})$, luego

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong K_n(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, & n \text{ par;} \\ K_1(\mathbb{C}) \cong \{0\}, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

De igual forma,

$$K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} \{0\}, & n \text{ par;} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Para cada $n \geq 0$, sea

$$\mathbb{T}^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x_1|^2 + \ldots + |x_{n+1}|^2 = 1\}.$$

La compactificación unipuntual de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{T}^n$, $n \geq 1$. De esta manera, obtenemos un isomorfismo

$$C_0(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C} \cong \widetilde{C_0(\mathbb{R}^n)} \cong C(\mathbb{T}^n).$$

En consecuencia

$$K_0(C(\mathbb{T}^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n \text{ par;} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

$$K_1(C(\mathbb{T}^n)) \cong \begin{cases} \{0\}, & n \text{ par;} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

En particular

$$K_0(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z} \cong K_1(C(\mathbb{T})). \tag{13}$$

3. El álgebra de Toeplitz

Sea $\mathbb{T}$ el círculo unitario sobre el plano complejo y μ la medida de Lebesgue normalizada sobre $\mathbb{T}$, es decir $\mu(\mathbb{T}) = 1$.

Como es usual, $L^\infty(\mathbb{T})$ denota el espacio de Banach de funciones complejas medibles y acotadas en $\mathbb{T}$ con la norma

$$\|f\|_\infty := \text{mín}\{M \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in \mathbb{T} : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

El espacio de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ es el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$

$$\{f \in L^2(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} f\overline{\chi_n} d\mu = 0 \text{ para } n = -1, -2, -3, \ldots\}$$

donde $\chi_n(z) = z^n$. El conjunto $\{\chi_n(z) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ forma una base para $H^2(\mathbb{T})$.

Sea $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, el operador de multiplicación $M_g : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ se define por $f \longmapsto gf$. Notemos que M_g es un operador normal con norma $\|M_g\| = \|g\|_\infty$.

Para $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, el *operador de Toeplitz* $T_\phi : H^2(\mathbb{T}) \longrightarrow H^2(\mathbb{T})$ se define por

$$T_\phi(f) = PM_\phi(f),$$

donde P es la proyección de $L^2(\mathbb{T})$ sobre $H^2(\mathbb{T})$.

Así $\phi(z) = z \in L^\infty(\mathbb{T})$ define al operador de Toeplitz T_z. Observemos que $T_z(\chi_n) = \chi_{n+1}$. Esto es, T_z es un operador de desplazamiento y $T_z = M_z$. Es fácil ver que $T_z^* = T_{\bar{z}}$ y que si 1 denota a la función constante 1 entonces $T_{\bar{z}}(1) = 0$.

Además T_1 es el operador identidad en $H^2(\mathbb{T})$, por lo que $T_1 \in C^*(T_z)$, donde $C^*(T_z)$ es la subálgebra C^* de $B(H^2(\mathbb{T}))$ generada por T_z. Si $n > 0$ es claro que $T_{z^n} = M_{z^n} = (M_z)^n = (T_z)^n$. Esto implica que $T_{z^n} \in C^*(T_z)$.

Sea $n < 0$, entonces $T_{z^{|n|}} = T_{\bar{z}^n} = T_{z^n}^*$. Es decir $T_{z^n} \in C^*(T_z)$ también. Así si $\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ entonces $T_\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T_{z^n} \in C^*(T_z)$. Es decir si $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ entonces $T_\varphi \in C^*(T_z)$. Como $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ se sigue que el álgebra $C^*(T_z)$ contiene a todos los operadores de Toeplitz.

Sea H un espacio de Hilbert separable, y por lo tanto isomorfo al espacio de Hardy $H^2(\mathbb{T})$, y sea $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ una base ortonormal para H.

Sea S el operador acotado en H dado por $S(e_n) = e_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El operador S^* está dado por $S^*(e_1) = 0$ y $S^*(e_n) = e_{n-1}$ para $n \geq 2$. Así $S^*S = I$, donde I denota al operador identidad en H. El operador S se llama el operador de desplazamiento unilateral, con respecto a la base $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

El *álgebra de Toeplitz* $\mathcal{T}$ se define como la subálgebra C^* de $B(H)$ generada por S, $\mathcal{T} := C^*(S)$. Note que, dado que T_z es el operador de desplazamiento unilateral en el espacio de Hilbert $H^2(\mathbb{T})$, el álgebra C^* $\mathcal{T}$ es isomorfa a $C^*(T_z)$ mediante el isomorfismo que actúa en el generador de la siguiente forma $S \mapsto T_z$.

Para $i, j \in \mathbb{N}$, sea $E_{ij} \in B(H)$ el operador dado por $E_{ij}(x) = \langle x, e_i \rangle e_j$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno de H. Definamos

$$F_n = \sum_{j=1}^{n} E_{jj}.$$

Es obvio que F_n es la proyección de H en el subespacio H_n generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B(H_n) = F_n B(H) F_n = \mathrm{span}\{E_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$.

Como $SS^*(e_j) = e_j$, para $j \neq 1$ y $SS^*(e_1) = 0$, entonces

$$F_1 = E_{11} = I - SS^*, \tag{14}$$

donde I denota al operador identidad de $B(H)$. Además

$$E_{ij} = S^{i-1}F_1(S^*)^{j-1}, \quad i,j \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Por lo tanto, cada E_{ij} es un elemento de $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{K}$ el ideal de $B(H)$ formado por los operadores compactos en H. El espacio $\mathcal{K}$ es la cerradura de la unión[3] $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_nB(H)F_n$ y por lo tanto $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$.

Consideremos el álgebra cociente $\mathcal{Q}(H) := B(H)/\mathcal{K}$, usualmente llamada el *álgebra de Calkin*. Sea $\pi : B(H) \longrightarrow \mathcal{Q}(H)$ la proyección canónica.

Un operador $T \in B(H)$ es un operador de Fredholm si T es invertible en el álgebra de Calkin $\mathcal{Q}(H)$. El índice de Fredholm se define sobre el conjunto de operadores de Fredholm $\Phi(H)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathrm{index} : \Phi(H) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ T &\longmapsto \dim\ker(T) - \dim\ker(T^*) \end{aligned}$$

La función index es continua[4], por lo tanto si T_1 y T_2 son homotópicos entonces tienen el mismo índice de Fredholm.

Dado que S^*S es la identidad y $F_1 = I - SS^* \in \mathcal{K}$, $\pi(S)$ es un elemento unitario en $\mathcal{Q}(H)$ y como consecuencia S es un operador de Fredholm. Además, $\ker(S) = 0$ y $\ker(S^*) = \mathrm{span}(e_1)$ por lo que

$$\mathrm{index}(\pi(\mathrm{S})) = \mathrm{index}(S) = -1. \tag{16}$$

Sea a un elemento de un álgebra C^*, denotamos por $\sigma(a)$ al espectro de a. En un álgebra C^* todo elemento unitario con espectro distinto de $\mathbb{T}$ es homotópico a la identidad. Por lo tanto $\sigma(\pi(S)) = \mathbb{T}$ pues $\mathrm{index}(\pi(S)) = \mathrm{index}(S) \neq \mathrm{index}(I) = 0$, es decir $[\pi(S)]_1 \neq [1]_1 = 0$.

Observemos que $\mathcal{T}/\mathcal{K} = C^*(\pi(S))$. Por el Teorema de Gelfand[5] $C^*(\pi(S)) \cong C(\sigma(\pi(S))) = C(\mathbb{T})$. De esta manera, obtenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{T} \xrightarrow{\psi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0\,. \tag{17}$$

[3] Véase [12], Lema 3.3.2 y Teorema 3.3.3.
[4] Véase [10], Teorema 1.4.17.
[5] Véase [10], Teorema 2.1.10.

donde ι es la inclusión y ψ es la composición de π con la transformada de Gelfand que identifica $C^*(\pi(S))$ con $C(\mathbb{T})$ y tal que manda $\pi(S)$ a la función $f(z) = z$ de $C(\mathbb{T})$. De aquí obtenemos que $\psi(S)(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{T}$. Dado que la función index es invariante bajo homotopías, definimos $\operatorname{index}(f) := \operatorname{index}(V_f)$ para todo $f \in \mathcal{U}(C(\mathbb{T}))$, donde $V_f \in \mathcal{T}$ es tal que $\psi(V_f) = f$. En este caso $\operatorname{index}(\psi(S)) = -1$.

3.1. K-teoría de $\mathcal{T}$

La sucesión exacta corta (17) induce la sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd} K_1(\mathcal{K}) \arrow[r, "k_1(\iota)"] & K_1(\mathcal{T}) \arrow[r, "k_1(\psi)"] & K_1(C(\mathbb{T})) \arrow[d, "\delta_1"] \\ K_0(C(\mathbb{T})) \arrow[u] & K_0(\mathcal{T}) \arrow[l, "k_0(\psi)"] & K_0(\mathcal{K}) \arrow[l, "k_0(\iota)"] \end{tikzcd}$$

donde δ_1 es la función de índice definida en (10).

Observemos que

$$v = \begin{pmatrix} S & 1 - SS^* \\ 0 & S^* \end{pmatrix} \text{ y } p = \begin{pmatrix} 1 - (1 - SS^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfacen las condiciones del Lema 2.2.4 para $\psi(S)$, luego $\delta_1([\psi(S)]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0 = [1 - (1 - SS^*)]_0 - [1]_0 = -[1 - SS^*]_0 = -[F_1]_0$.

Si E y F son dos proyecciones compactas, entonces son de dimensión finita y es fácil ver que $E \sim F$ si y sólo si $\dim(E) = \dim(F)$. Luego

$$\begin{aligned} \alpha : \quad K_0(\mathcal{K}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [E]_0 - [F]_0 &\longmapsto \dim(E) - \dim(F) \end{aligned} \tag{18}$$

es un isomorfismo. Por lo tanto $\alpha(-[F_1]) = -1$.

Por la Ecuación (13), tenemos que $K_0(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z} \cong K_1(C(\mathbb{T}))$. Usando la ecuación (12) identificamos $K_1(\mathcal{K})$ con $\{0\}$. Así obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "k_1(\iota)"] & K_1(\mathcal{T}) \arrow[r, "k_1(\psi)"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\delta_1"] \\ \mathbb{Z} \arrow[u] & K_0(\mathcal{T}) \arrow[l, "k_0(\psi)"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "k_0(\iota)"] \end{tikzcd}$$

Del hecho que $\delta_1([\psi(S)]_1) = -1$ se sigue que δ_1 es sobreyectivo, y como index : $K_1(C^*(\mathbb{T})) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo con $\mathrm{index}(\psi(S)) = -1$ se sigue que δ_1 es inyectivo y por lo tanto es un isomorfismo.

Así, el homomorfismo $k_1(\psi)$ es 1 a 1 y como $\mathrm{Im}(k_1(\psi)) = \ker(\delta_1) = 0$ entonces

$$K_1(\mathcal{T}) = \{0\}.$$

Por otra parte, como $\ker(k_0(\iota)) = \mathrm{Im}(\delta_1) = \mathbb{Z}$ entonces $k_0(\iota) = 0$. Además $\ker(k_0(\psi)) = \mathrm{Im} k_0(\iota) = 0$, concluimos que $k_0(\psi)$ es 1-1 y por tanto un isomorfismo. Esto es

$$K_0(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}.$$

Hemos demostrado el siguiente Teorema

Teorema 3.1.1 *Los grupos de K-teoría $K_0(\mathcal{T})$ y $K_1(\mathcal{T})$ para el álgebra de Toeplitz son $\mathbb{Z}$ y $\{0\}$, respectivamente.*

4. El grupo K_0 del álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una isometría en $\mathcal{H}$ es un operador S en $B(\mathcal{H})$ tal que $S^*S = I$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\{S_i\}_{i=1}^n$ una familia de isometrías en $\mathcal{H}$ tal que $\sum_{i=1}^n S_iS_i^* = I$. El álgebra C^* generada por $\{S_i\}_{i=1}^n$ y denotada por $C^*(\{S_i\}_{i=1}^n)$, es universal en el sentido que, si $\{\hat{S}_i\}_{i=1}^n$ es otro conjunto de isometrías que satisface $\sum_{i=1}^n \hat{S}_i\hat{S}_i^* = 1$, entonces

$$C^*(\{S_i\}_{i=1}^n) \cong C^*(\{\hat{S}_i\}_{i=1}^n). \tag{19}$$

Para la demostración de este hecho vea [6], Teorema 1.12.

Denotaremos por $\mathcal{O}_n$ al álgebra generada por n isometrías $\{S_i\}_{i=1}^n$ tales que $\sum_{i=1}^n S_iS_i^* = I$. El álgebra $\mathcal{O}_n$ se llama el álgebra de Cuntz.

Notemos que $\sum_{i=1, i\neq j}^n S_iS_i^*S_j = 0$. Si $x \in \mathcal{H}$ y $y = S_jx$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle \sum_{i=1,i\neq j}^{n} S_iS_i^*S_jx,\ y \right\rangle &= \sum_{i=1,i\neq j}^{n} \langle S_iS_i^*S_jx,\ y\rangle \\ &= \sum_{i=1,i\neq j}^{n} \langle S_i^*S_jx,\ S_i^*y\rangle = \sum_{i=1,i\neq j}^{n} \langle S_i^*S_jx,\ S_i^*S_jx\rangle \\ &= \sum_{i=1,i\neq j}^{n} \|S_i^*S_jx\|^2. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$S_i^* S_j = \delta_{ij} I, \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}. \tag{20}$$

En [4] Joachin Cuntz calcula la K-teoría de las álgebras $\mathcal{O}_n$, demostrando primero una serie de resultados en K-teoría para álgebras simples. Demuestra que el grupo unitario de $\mathcal{O}_n$ es conexo y, usando el Teorema de periodicidad de Bott en K-teoría, demuestra que $K_1(\mathcal{O}_n)$ es trivial.

En el presente sección se utilizaron las propiedades de $\mathcal{O}_n$ como álgebra C^* de operadores, para calcular el grupo $K_0(\mathcal{O}_n)$. Para ello se tomaron conceptos de [9] para los cálculos iniciales y se complementó con los resultados previos de [4] y [6].

4.1. El orden de $K_0(\mathcal{O}_n)$

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, $s \in \mathcal{A}$ es una isometría si $s^*s = 1_{\mathcal{A}}$, donde $1_{\mathcal{A}}$ es el elemento identidad de $\mathcal{A}$. El siguiente resultado es válido para cualquier álgebra C^*.

Proposición 4.1.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y s una isometría en $\mathcal{A}$. La función*

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ a &\longmapsto sas^* \end{aligned}$$

es un endomorfismo de $\mathcal{A}$, es decir un $*$-homomorfismo de $\mathcal{A}$ en sí mismo. Además $k_0(\mu) = Id$, donde Id es el homomorfismo identidad de $K_0(\mathcal{A})$ en $K_0(\mathcal{A})$.

Demostración: Es claro que μ es un endomorfismo de $\mathcal{A}$. Por otra parte, para $m \in \mathbb{N}$ fijo, se define

$$\begin{aligned} \mu_m : M_m(\mathcal{A}) &\longrightarrow M_m(\mathcal{A}) \\ a = (a_{ij}) &\longmapsto (\mu(a_{ij})). \end{aligned}$$

Sea

$$s_m = \begin{pmatrix} s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\mu_m(a) = s_m a s_m^*$ y que μ_m es un endomorfismo de $M_m(\mathcal{A})$.

Extendemos μ a $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ de la siguiente manera. Para $p \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \mathcal{P}_m(\mathcal{A})$. Definimos $\mu(p) := \mu_m(p)$.

Claramente $\mu(p) \in \mathcal{P}_m(\mathcal{A})$ pues μ_m es un $*$-homomorfismo. Sea $r = s_m p$, entonces

$$\begin{aligned} r^*r &= p^*s_m^*s_m p = p^*p = p, \\ rr^* &= s_m pp^*s_m^* = s_m ps_m^* = \mu(p). \end{aligned}$$

Esto es $p \sim_0 \mu(p)$, por lo tanto $[p]_0 = [\mu(p)]_0$. Como $k_0(\mu)[p]_0 = [\mu(p)]_0$, concluimos que $k_0(\mu)[p]_0 = [p]_0$ para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$.

Como $K_0(\mathcal{A}) = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})\}$,

$$k_0(\mu)(g) = g$$

para todo $g \in K_0(\mathcal{A})$. □

Proposición 4.1.2 *Sea $\lambda : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$ dado por*

$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^{n} S_j x S_j^*.$$

Entonces λ es un endomorfismo de $\mathcal{O}_n$ y $k_0(\lambda)(g) = ng$ para todo $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$.

Demostración: Para cada $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$, la función

$$\begin{aligned} \mu_j : \mathcal{O}_n &\longrightarrow \mathcal{O}_n \\ x &\longmapsto S_j x S_j^* \end{aligned}$$

es un endomorfismo, por la Proposición 4.1.1. Luego $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$ es también un endomorfismo.

La Ecuación (20) implica que, para $i \neq j$,

$$\mu_j(x)\mu_i(x) = S_j x(S_j^* S_i) x S_i^* = 0$$

para todo $x \in \mathcal{O}_n$.

Extendamos λ y μ_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{O}_n)$. Para cada $E \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{O}_n)$, $\{\mu_1(E), \mu_2(E), \ldots, \mu_n(E)\}$ es un conjunto de proyecciones ortogonales a pares. Así, por la Proposición 2.2.2 **(iv)** se tiene

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \mu_j(E)\right]_0 = \sum_{j=1}^{n} [\mu_j(E)]_0.$$

Luego

$$k_0(\lambda)([E]_0) = \sum_{j=1}^{n} k_0(\mu)[E]_0.$$

Finalmente, por la Proposición 4.1.1, se tiene que

$$K_0(\lambda)[E]_0 = n[E]_0. \qquad \square$$

Si $U \in \mathcal{O}_n$ es unitario entonces el conjunto $\{T_i = US_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ satisface

- $T_i^* T_i = S_i^* U^* U S_i = S_i^* S_i = I$,
- $\sum_{i=1}^n T_i T_i^* = \sum_{i=1}^n U S_i S_i^* U^* = U \left(\sum_{i=1}^n S_i S_i^*\right) U^* = UU^* = I.$

Por (19), existe un homomorfismo $\phi_U : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$ tal que

$$\phi_U(S_i) = US_i.$$

En la siguiente proposición se demuestra que todos los homomorfismos ψ de $\mathcal{O}_n$ con $\psi(I) = I$ satisfacen la propiedad anterior.

Proposición 4.1.3 *Sea $\psi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$ un $*$-homomorfismo que preserva la identidad, entonces existe $U \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_n)$ tal que $\psi(S_i) = US_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Demostración: Defínase

$$U = \sum_{i=1}^{n} \psi(S_i) S_i^*. \tag{21}$$

Así

$$\begin{aligned} UU^* &= \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(S_i) S_i^*\right) \left(\sum_{j=1}^{n} S_j \psi(S_j^*)\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \psi(S_i) S_i^* S_j \psi(S_j^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \psi(S_i^* S_i) = I \end{aligned}$$

De igual forma se demuestra que $U^*U = I$. Notemos que, usando la Ecuación (20), para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$US_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(S_i) S_i^*\right) S_j = \sum_{i=1}^{n} \psi(S_i) S_i^* S_j = \psi S_j S_j^* S_j = \psi(S_j). \quad \square$$

Lema 4.1.4 *Sea $\lambda : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$ dado por*

$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^{n} S_j x S_j^*.$$

Entonces λ es un endomorfismo de $\mathcal{O}_n$ y $k_0(\lambda)(g) = g$ para todo $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$.

Demostración: De las Proposiciones 4.1.2 y 4.1.3 se sigue que λ es un endomorfismo y que $\lambda = \varphi_u$ donde U está dado por la Ecuación (21). En este caso,

$$\begin{aligned} U^* = \sum_{i=1}^{n} S_i \lambda(S_i^*) &= \sum_{i=1}^{n} S_i (S_i S_i^* S_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (S_i S_i S_i^*) S_i^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda(S_i) S_i^* = U \end{aligned}$$

Es decir, U además de unitario es autoadjunto. Usando Cálculo funcional continuo[6], el espectro $\sigma(U)$ está contenido en $\{-1, 1\}$. La función $\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$, donde $\pi/2 \leq \arg(z) < 5\pi/2$, es continua en $\sigma(U)$ y el elemento $H := -i \ln(U) \in \mathcal{O}_n$ está bien definido y es normal, por lo tanto $\sigma(H) = \sigma\{-i \ln(z) | z \in \sigma(U)\} \subset [\pi/2, 5\pi/2) \subset \mathbb{R}$. Es decir, H es autoadjunto. Además $\exp(iH) = U$, así $t \mapsto U_t := \exp(tiH)$ es una trayectoria de elementos unitarios que une la identidad con U en $\mathcal{O}_n$. Entonces $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{O}_n)$, la componente conexa de la identidad en $\mathcal{U}(\mathcal{O}_n)$.

Cada $t \in [0, 1]$ define el endomorfismo φ_{U_t} de $\mathcal{O}_n$. Entonces $t \mapsto \phi_{U_t}$ es una trayectoria continua que une λ con la identidad en $\mathcal{O}_n$.

De esta forma, $k_0(\lambda) = k_0(id) = id$. Es decir $k_0(\lambda)(g) = g$, para todo $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$. □

El siguiente resultado nos dice que $K_0(\mathcal{O}_n)$ es un grupo abeliano de, a lo más, orden $n - 1$.

Teorema 4.1.5 *Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Si $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$, entonces $(n - 1)g = 0$. En particular $K_0(\mathcal{O}_2) = 0$.*

Demostración: Por la Proposición 4.1.2 y el Lema 4.1.4 se sigue que $ng = g$ para todo $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$. Por lo tanto $(n - 1)g = 0$. □

Consideremos el álgebra $\mathcal{O}_{n+1}$ generada por las isometrías

$$\{V_1, V_2 \ldots, V_{n+1}\}$$

[6] Véase Zhu, sección 10.3

y su subálgebra $\mathcal{A} := C^*(V_1, V_2, \ldots, V_n)$. Sea $\mathcal{J}$ el mínimo ideal bilateral cerrado de $\mathcal{A}$ que contiene a la proyección $V_{n+1}V_{n+1}^* = I - \sum_{i=1}^n V_iV_i^*$. El ideal $\mathcal{J}$ es isomorfo al ideal $\mathcal{K}$ de operadores compactos en un espacio de Hilbert[7].

Sea $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{J}$ la proyección canónica y sea $S_i = \pi(V_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Así, cada S_i es una isometría en $C^*(V_1, V_2, \ldots, V_n)/\mathcal{J}$ y además

$$\sum_{i=1}^n S_iS_i^* = \pi(V_{n+1}V_{n+1}^*) + \sum_{i=1}^n S_iS_i^* = \left(I - \sum_{i=1}^n S_iS_i^*\right) + \sum_{i=1}^n S_iS_i^* = I.$$

Así $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ es isomorfo a $\mathcal{O}_n$ y podemos escribir $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}_n$, con $\pi(V_i) = S_i$ para cada $i = 1, 2 \ldots, n$.

Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, sea

$$\begin{aligned} \lambda_k : \mathcal{O}_{n+1} &\longrightarrow \mathcal{O}_{n+1} \\ x &\longmapsto \textstyle\sum_{i=1}^k V_ixV_i^*. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}_{n+1}$ la mínima álgebra $\mathbb{C}^*$ que contiene a $\mathcal{A}$ y tal que $\lambda_{n+1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$.

Proposición 4.1.6 *Consideremos el $*$-homomorfismo restringido*

$$\lambda_{n+1} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}.$$

Entonces $k_0(\lambda_{n+1})[E]_0 = [E]_0$, $E \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, *donde*

$$k_0(\lambda_{n+1}) : K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathcal{B}).$$

Demostración: En la demostración del Lema 4.1.4 se demostró que $U = \sum_{i=1}^{n+1} V_i\lambda_{n+1}(V_i^*)$ es un elemento autoadjunto de $\mathcal{U}_0(\mathcal{O}_{n+1})$. Además $t \mapsto \varphi_{U_t}$ es una trayectoria de $*$-homomorfismos unitarios de $\mathcal{O}_{n+1}$ que unen λ_{n+1} con la identidad en $\mathcal{O}_{n+1}$, y $t \mapsto U_t = \exp(itH)$ es una trayectoria de elementos unitarios tal que $U_0 = I$ y $U_1 = U$, donde $H = -i\ln(U)$ es autoadjunto.

Por otra parte $V_i\lambda_{n+1}(V_i^*)$ está en $\mathcal{B}$ para $1 \leq i \leq n$. Como

$$V_{n+1}V_{n+1}^* = I - \sum_{i=1}^n V_iV_i^*$$

[7]Véase [6], Proposición 3.1

entonces

$$\begin{aligned} V_{n+1}\lambda_{n+1}(V_{n+1}^*) = V_{n+1}(V_{n+1}V_{n+1}^*)V_{n+1}^* &= V_{n+1}(1-\sum_{i=1}^{n} V_iV_i^*)V_{n+1}^* \\ &= \lambda_{n+1}(1-\sum_{i=1}^{n} V_iV_i^*) - \lambda_n(1-\sum_{i=1}^{n} V_iV_i^*) \end{aligned}$$

es un elemento de $\mathcal{B}$ también. Entonces $H \in \mathcal{B}$ y por lo tanto, cada $U_t \in \mathcal{B}$. Así $\varphi_{U_t}|_{\mathcal{A}}$ es una trayectoria de $*$-homomorfismos de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

Puesto que K_0 es un functor invariante bajo homotopías, se sigue que $k_0(\lambda_{n+1})[E]_0 = [E]_0$ para todo $E \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. □

Sea

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ x &\longmapsto V_{n+1}xV_{n+1}^*. \end{aligned}$$

Entonces, si $x \in \mathcal{B}$, $\lambda_{n+1}(x) = \lambda_n(x) + \alpha(x)$. Como

$$(\sum_{i=1}^{n} V_ixV_i^*)\alpha(x) = \alpha(x)(\sum_{i=1}^{n} V_ixV_i^*) = 0$$

se sigue que

$$\begin{aligned} k_0(\lambda_{n+1})([E]_0) &= [\lambda_{n+1}(E)]_0 \\ &= [\lambda_n(E)]_0 + k_0(\alpha)[E]_0 \\ &= n[E]_0 + k_o(\alpha)([E]_0). \end{aligned} \tag{22}$$

Usando la Proposición 4.1.6 se sigue que

$$[E]_0 = n[E]_0 + k_0(\alpha)([E]_0) \text{ en } K_0(\mathcal{B}), \text{ para todo } E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}). \tag{23}$$

Sea $\mathcal{J}'$ el ideal bilateral cerrado de $\mathcal{B}$ generado por $V_{n+1}\mathcal{A}V_{n+1}^*$. El ideal $\mathcal{J}'$ contiene al ideal $\mathcal{J}$ y $\mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{J}'$ pues si $A \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{J}$ con $A \in \mathcal{J}'$ entonces $A = 0$ ya que $V_{n+1}V_iV_{n+1}^* = 0$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego $\mathcal{J}'$ es un ideal propio de $\mathcal{B}$ y

$$\mathcal{B}/\mathcal{J}' \cong \mathcal{A}/\mathcal{J} \cong \mathcal{O}_n.$$

Sea $j : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ la función de inclusión, entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{J} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, hook] & \mathcal{A} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook, "j"] & \mathcal{O}_n \arrow[d, equal] \\ \mathcal{J}' \arrow[r, hook, "\iota'"] & \mathcal{B} \arrow[r, "\pi'"] & \mathcal{O}_n \end{tikzcd} \tag{24}$$

induce el diagrama conmutativo en K-teoría

(25)
$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{J}) & \xrightarrow{k_0(\iota)} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{k_0(\pi)} & K_0(\mathcal{O}_n) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k_0(j)} & & \| \\ K_0(\mathcal{J}') & \xrightarrow{k_0(\iota')} & K_0(\mathcal{B}) & \xrightarrow{k_0(\pi')} & K_0(\mathcal{O}_n) \end{array}$$

Lema 4.1.7 *Para cada $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g = k[I]_0$. Es decir $K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}[I]_0$.*

Demostración: Del diagrama (25) se sigue que $k_0(\pi) = k_0(\pi')k_0(j)$. Notemos que si $k_0(\pi)([E]_0) \neq 0$ entonces $k_0(j)[E]_0 \neq 0$. Luego, de la Ecuación (23) se tiene que

$$k_0(j)([E]_0) = nk_0(j)[E]_0 + k_0(\alpha)k_0(j)([E]_0) \neq nk_0(j)([E]_0).$$

Por lo tanto $[E]_0 \neq n[E]_0$ en $K_0(\mathcal{A})$. Es decir si $k_0(\pi)([E]_0) \neq 0$ entonces $[E]_0 \neq n[E]_0$. Por otra parte

$$\begin{aligned} k_0(j)[I]_0 &= nk_0(j)([I]_0) + k_0(\alpha)k_0(j)([I]_0) \\ &= nk_0(j[I]_0) + k_0(j)[S_{n+1}S_{n+1}^*]_0 \\ &= k_0(j)(n[I]_0 + [S_{n+1}S_{n+1}^*]_0). \end{aligned}$$

Luego

(26)
$$n[I]_0 = [I]_0 - [S_{n+1}S_{n+1}^*]_0.$$

Puesto que $S_{n+1}S_{n+1}^*$ genera a $\mathcal{J}$ se sigue que $r = [S_{n+1}S_{n+1}^*]_0$ genera a $k_0(\iota)(K_0(\mathcal{J}))$, es decir $\ker k_0(\pi) = \mathbb{Z}r$. Luego para cada $g \in K_0(\mathcal{A})$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(n-1)g = kr$. Por la Ecuación (26) se tiene

$$n(g + k[1]_0) = g + kr + k[1]_0 - kr = p + k[1]_0.$$

Entonces, necesariamente

$$k_0(\pi)(g) = -kk_0(\pi)([1]_0) = -k[1]_0 \text{ en } K_0(\mathcal{O}_n). \qquad \square$$

Por el Lema anterior, para cada proyección $E \in \mathcal{O}_n$ existe $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ tal que $E \sim \sum_{i=0}^{k} S_iS_i^*$ y esto implica que $\dim(E) = \dim(\sum_{i=0}^{k} S_iS_i^*)$. Notemos que si $k \neq 0$ entonces $\dim(\sum_{i=0}^{k} S_iS_i^*) = \infty$. En consecuencia,

(27)
$$[E]_0 = 0 \text{ para toda proyección finita } E \in \mathcal{O}_n.$$

Para obtener el grupo $K_0(\mathcal{O}_n)$ consideremos ahora $V_1, V_2, \ldots$ una sucesión de isometrías en un espacio de Hilbert tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} V_i V_i^* \leq I.$$

Sea

$$\mathcal{O}_\infty = C^*(V_1, V_2, \ldots).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Denotemos por $\mathcal{J}$ al mínimo ideal bilateral cerrado contenido en $C^*(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ que contiene a la proyección $I - \sum_{i=1}^{n} V_i V_i^*$. El ideal $\mathcal{J}$ es isomorfo a $\mathcal{K}$, el ideal de operadores compactos sobre un espacio de Hilbert de dimensión infinita(véase [6], Proposición 3.1).

Sea $\pi : C^*(V_1, V_2, \ldots, V_n) \longrightarrow C^*(V_1, V_2, \ldots, V_n)/\mathcal{J}$ la proyección canónica. Sea $S_i = \pi(V_i)$. Es fácil ver que S_i es una isometría para todo $i = 1, \ldots, n$ y que

$$\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = I.$$

Identificamos $C^*(V_1, V_2, \ldots, V_n)/\mathcal{J}$ con $\mathcal{O}_n$. De esta manera, podemos escribir $\pi : C^*(V_1, V_2, \ldots, V_n) \longrightarrow \mathcal{O}_n$, con $\pi(V_i) = S_i$ para cada $i = 1, 2 \ldots, n$.

Teorema 4.1.8 *Sean $r, s \in \mathbb{Z}$, entonces $r[I]_0 = s[I]_0$ en $K_0(\mathcal{O}_n)$ si y sólo si $r \equiv s$ módulo $n-1$, donde I denota la identidad en $\mathcal{O}_n$*

Demostración: Si $r \equiv s$ módulo $n-1$ entonces $r = r'(n-1) + t$ y $s = s'(n-1) + t$ donde $r', s', t \in \mathbb{Z}$. Luego, por el Teorema 4.1.5, se sigue que $r'(n-1)[I]_0 = s'(n-1)[I]_0 = 0$. Por lo tanto

$$r[I]_0 = r'(n-1)[I]_0 + t[I]_0 = t[I]_0 = s'(n-1)[I]_0 + t[I]_0 = s[I]_0.$$

Recíprocamente, supongamos que $r[I]_0 = s[I]_0$ en $K_0(\mathcal{O}_n)$. Por lo anterior, podemos suponer que $1 \leq r, s \leq n-1$.

Consideremos las isometrías $\{V_1, V_2, \ldots\}$ descritas anteriormente y

$$\mathcal{O}_n = C^*(V_1, V_2, \ldots, V_n)/\mathcal{J}.$$

Sea $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fijo, y como antes $\lambda_k : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$ dada por

$$\lambda_k(x) = \sum_{i=1}^{k} S_i x S_i^*.$$

Siendo $\{S_i x S_i^*\}$ un conjunto de proyecciones mutuamente ortogonales, la Proposición 2.2.2 **(iv)** y la Proposición 4.1.1 implican que

$$k_0(\lambda_k)([x]_0) = [\lambda_k(x)]_0 = k[x]_0.$$

Si tomamos $x = I$ se tiene

- $k_0(\lambda_r)([I]_0) = [\lambda_r(I)]_0 = r[I]_0,$
- $k_0(\lambda_s)([I]_0) = [\lambda_s(I)]_0 = s[I]_0.$

como $r[I]_0 = s[I]_0$ se sigue que $[\lambda_r(I)]_0 = [\lambda_s(I)]_0$, es decir existe una isometría parcial $U \in \mathcal{O}_n$ tal que

$$U^*U = \lambda_r(I) = \sum_{i=1}^{r} S_i S_i^*,$$
$$UU^* = \lambda_s(I) = \sum_{i=1}^{s} S_i S_i^*.$$

Sea $\hat{U} \in C^*(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ tal que $\pi(\hat{U}) = U$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se define

$$E_k = \sum_{i=1}^{k} V_i V_i^*.$$

Notemos que

$$\pi(\hat{U}^*\hat{U}) = U^*U = \sum_{i=1}^{r} S_i S_i^* = \sum_{i=1}^{r} \pi(V_i V_i^*) = \pi\left(\sum_{i=1}^{r} V_i V_i^*\right) = \pi(E_r).$$

Luego $\hat{U}^*\hat{U} = E_r + k_1$ para algún $k_1 \in \mathcal{J}$. Análogamente $\hat{U}\hat{U}^* = E_s + k_2$ para algún $k_2 \in \mathcal{J}$.

Observemos que $\pi(\hat{U}E_r) = U$, entonces podemos escribir $k_1 = E_r k_1 E_r$. El espectro de $\hat{U}^*\hat{U}$, $\sigma(\hat{U}^*\hat{U})$, contiene al cero. Esto es porque $\hat{U}^*\hat{U}$ es no invertible.

El cero es un punto aislado de $\sigma(\hat{U}^*\hat{U})$. En efecto, si

$$\{\lambda_n\} \subset \sigma(\hat{U}^*\hat{U}) \backslash \{0, 1\} \text{ con } \lambda_n \to 0,$$

entonces $\hat{U}^*\hat{U} - \lambda_n I$ es no invertible en $C^*(V_1, \ldots, V_n)$. Para esto existen dos posibilidades:

Caso 1 : $\hat{U}^*\hat{U} - \lambda_n I$ no es inyectivo. Entonces existe $h \in H - \{0\}$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= (\hat{U}^*\hat{U} - \lambda_n I)h \\ &= (E_r - E_r k_1 E_r - \lambda_n I)h \end{aligned}$$

Aplicando E_r se tiene que $(E_r k_1 E_r - (1-\lambda_n))E_r h = 0$ es decir $(1-\lambda_n)$ es un elemento del espectro del compacto $E_r k_1 E_r$.

Caso 2 : $\hat{U}^*\hat{U} - \lambda_n I$ no es suprayectivo. Entonces existe $h \in H$ tal que $h \notin (\hat{U}^*\hat{U} - \lambda_n I)H$. Notemos que

$$\begin{aligned} (\hat{U}^*\hat{U} - \lambda_n I) &= (E_r - E_r k_1 E_r - \lambda_n I) \\ &= -(E_r k_1 E_r + (I - E_r) - (1-\lambda_n)I) \end{aligned}$$

luego si $\hat{U}^*\hat{U} - \lambda_n I$ no es suprayectivo entonces $(E_r k_1 E_r + (I - E_r) - (1-\lambda_n)I)g \neq h$ para todo $g \in H$. Si $(E_r k_1 E_r - (1-\lambda_n)I)f = h$ para algún $f \in H$ entonces $(E_r k_1 E_r + (I - E_r) - (1-\lambda_n)I)f' = h$ para $f' = E_r(f) + (I - E_r)h/\lambda_n$. Esto es $(E_r k_1 E_r - (1-\lambda_n)I)$ tampoco es suprayectivo. Por lo tanto $(1-\lambda_n)$ es un elemento del espectro del operador compacto $E_r k_1 E_r$.

Es decir $\{1-\lambda_n\} \subset \sigma(E_r K_1 E_r)$ converge a 1, pero el único punto de acumulación posible del espectro de un operador compacto es el cero. Por lo tanto, cero es un punto aislado de $\sigma(\hat{U}^*\hat{U})$. De igual forma, usando E_s se puede demostrar que cero también es un punto aislado del espectro de $\sigma(\hat{U}\hat{U}^*)$.

Sea f continua y positiva en el espectro de $\hat{U}^*\hat{U}$ tal que $f(0) = 0$ y $f(x) = x^{-1/2}$ si $x \neq 0$. Definamos $\tilde{U} = \hat{U} f(\hat{U}^*\hat{U})$, donde $f(\hat{U}^*\hat{U})$ está dado por el cálculo funcional. Si $g(z) = 1 - \chi_0(z)$ con $\chi_0(z)$ la función característica de $\{0\}$, entonces g es continua en $\sigma(\hat{U}^*\hat{U})$ y $g(\hat{U}^*\hat{U})$ es una proyección. Así

$$\begin{aligned} \tilde{U}^*\tilde{U} &= f(\hat{U}^*\hat{U})^*\hat{U}^*\hat{U} f(\hat{U}^*\hat{U}) \\ &= f^2(\hat{U}^*\hat{U})\hat{U}^*\hat{U} \\ &= g(\hat{U}^*\hat{U}) \\ &= I - \chi_0(\hat{U}^*\hat{U}) \\ &= E_r - (E_r - I) - \chi_0(\hat{U}^*\hat{U}) \\ &= E_r + \sum_{i=r+1}^{\infty} V_i V_i^* - \chi_0(\hat{U}^*\hat{U}). \end{aligned}$$

Notemos que $\chi_0(z) = 1 - z$ en $\sigma(\sum_{i=1}^r S_i S_i^*)$, luego

$$\begin{aligned}\pi(\sum_{i=r+1}^{\infty} V_i V_i^* - \chi_0(\hat{U}^*\hat{U})) &= \sum_{i=r+1}^{n} S_i S_i^* - \chi_0(\sum_{i=1}^{r} S_i S_i^*) \\ &= \sum_{i=r+1}^{n} S_i S_i^* - I + \sum_{i=1}^{r} S_i S_i^* = 0.\end{aligned}$$

Es decir, $\sum_{i=r+1}^{\infty} V_i V_i^* - \chi_0(\hat{U}^*\hat{U}) \in \mathcal{J}$.

Como $\tilde{U}^*\tilde{U} = \hat{U}^*\hat{U} f^2(\hat{U}^*\hat{U}) = f^2(\hat{U}^*\hat{U})\hat{U}^*\hat{U}$ entonces

$$E_r\tilde{U}^*\tilde{U} = \tilde{U}^*\tilde{U}E_r = \tilde{U}^*\tilde{U}.$$

Sea $P_1 := -(\sum_{i=r+1}^{\infty} V_i V_i^* - \chi_0(\hat{U}^*\hat{U}))$, entonces

$$P_1^2 = (\tilde{U}^*\tilde{U} - E_r)^2 = -(\tilde{U}^*\tilde{U} - E_r) = P_1. \tag{28}$$

Por lo tanto, P_1 es una proyección compacta y en consecuencia de dimensión finita. Además

$$\tilde{U}^*\tilde{U} = E_r - P_1. \tag{29}$$

Análogamente se puede demostrar que existe una proyección de dimensión finita $P_2 \in \mathcal{J}$ tal que

$$\tilde{U}\tilde{U}^* = E_s - P_2. \tag{30}$$

Luego $r[I]_0 + [P_2]_0 = s[I]_0 + [P_1]_0$ en $K_0(\mathcal{O}_\infty)$. Por la Ecuación (27) tenemos que $[P_1]_0 = [P_2]_0 = 0$, luego $r[I]_0 = s[I]_0$ y por lo tanto $r = s$. □

En resumen. El orden de $[1]_0$ es $n-1$ y sabemos que el orden de cada $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$ es a lo más $n-1$, además por el Lema 4.1.7 también se sabe que cada $g \in \mathcal{O}_n$ es múltiplo de $[I]_0$. Por lo tanto concluimos que el orden del grupo $K_0(\mathcal{O}_n)$ es $n-1$. Finalmente:

Teorema 4.1.9 *El grupo $K_0(\mathcal{O}_n)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{n-1}$.*

Agradecimientos

Agradezco a la Doctora Maribel Loaiza por su paciencia y su tutela.

Blanca Estela Bravo Silverio
Departamento de Matemáticas
CINVESTAV del IPN
A.P. 14-740, México D.F., 07000
México
bbravo@math.cinvestav.mx

Referencias

[1] Aguilar M.; Gitler S.; Prieto C., Topología Algebraica, McGraw-Hill, México, 1998.

[2] Blackadar B., K-Theory for Operator Algebras (M. S. R. I. Monographs **5**), Springer-Verlag, 1986.

[3] Blackadar B., Operator Algebras theory of C^* algebras and von Neumann algebras (Encyclopaedia of Mathematical Sciences **122**), Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[4] Cuntz J., *K-Theory for Certain $\mathcal{C}^*$-Algebras*, Ann. Math. No. 113 (1981), 181–197.

[5] Cuntz J., *Murray-von Neumann equivalence of projections in infinite simple C^*-algebras*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. No. 23 (1978), 1011–1014.

[6] Cuntz J., *Simple $\mathcal{C}^*$-Algebras Generated by Isometries*, Commun. Math. Phys., No. 57 (1977), 173–185.

[7] Davidson, K. R., $\mathcal{C}^*$-Algebras by Example (Fields Institute Monographs), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1996.

[8] Douglas R. G., Banach Algebra Techniques in Operator Theory (Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag, New York, 1998.

[9] Rørdam M.; Larsen F.; Laustsen N., An Introduction to K-Theory for $\mathcal{C}^*$-Algebras (London Math. Soc. Student Texts **49**), United Kingdom, 2000.

[10] Murphy G. J., $\mathcal{C}^*$-Algebras and Operator Theory, Academic Press, London, 1990.

[11] Zhu R., An Introduction to Operator Algebras (Studies in Advanced Mathematics), CRC Press, Florida, 1993.

[12] Pederson G. K., Analysis Now (Graduate Texts in Mathematics **120**), Springer-Verlag, New York-Berlin, 1988.