

Pozos potenciales poco profundos para la ecuación discreta de Schrödinger^{*}

Joel Arturo Rodríguez-Ceballos
Petr Zhevandrov Bolshakova

Resumen

Vamos a considerar la ecuación unidimensional *discreta* de Schrödinger de paso h cuando ésta tiene un cierto potencial suficientemente pequeño (ver Ec. (4)). Se sabe que el espectro esencial del correspondiente operador *discreto* de Schrödinger (véase Definición 3.1.9) consiste en un segmento de longitud finita del eje real. Dos valores propios aislados aparecen en el exterior de dicho espectro, próximos, respectivamente, a cada uno de sus extremos. En este artículo se construye una expresión explícita para cada uno de esos valores propios y las funciones propias correspondientes.

2000 Mathematics Subject Classification: 39A12, 35P15.

Palabras y expresiones claves: ecuación discreta de Schrödinger, asintótica, funciones propias, serie de Neumann.

1. Introducción

La ecuación unidimensional (continua) de Schrödinger

$$(1) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon V(x) \right) \Psi(x) = E \Psi(x)$$

cuando $V(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x)$, $\int_{\mathbf{R}} V(x) dx \leq 0$ y $\varepsilon \rightarrow 0$, tiene un único valor propio negativo $E_\varepsilon = -\mu^2(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon) > 0$ a la izquierda del espectro

^{*}El material de este artículo está basado en la tesis doctoral del primer autor, ex-becario del CONACyT, realizada en el Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

esencial $[0, \infty)$. Aproximaciones asintóticas (respecto al parámetro pequeño ε) de ese valor propio fueron encontradas explícitamente Landau & Lifshitz [10], Simon [16] y Zhevandrov & Merzon [19], [20], usando diferentes métodos (véanse también [1], [5]). Con $E = -\mu^2$, Zhevandrov & Merzon pasan a la representación de momentos correspondiente, para obtener

$$(2) \quad (p^2 + \mu^2)\tilde{\Psi}(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \tilde{V}(p-p')\tilde{\Psi}(p')dp',$$

donde la tilde denota la transformada de Fourier (ver [3]). Ya que $V(x) = 0$ para $|x|$ grande, para tales x tenemos $\Psi(x) \sim e^{-\mu|x|}$, y $\Psi(x)$ es casi constante porque $\mu \rightarrow 0$. Luego su transformada de Fourier es una función tipo δ y el lado derecho en (2) es aproximadamente igual a $\tilde{V}(p)$ salvo una constante multiplicativa. De aquí que es natural escoger el *ansatz* sugerido por (2), a saber,

$$(3) \quad \tilde{\Psi}(p) = \frac{a_0(p) + \varepsilon a_1(p) + \dots}{p^2 + \varepsilon^2(\beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \dots)^2},$$

con nuevas incógnitas $a_k(p) \in S(\mathbf{R})$, $\beta_k \in \mathbf{C}$, con el fin de construir una solución asintótica formal. Sustituyendo (3) en (2), descomponemos la integral resultante¹ usando el método de residuos y desarrollamos cada lado de la igualdad que queda en serie de potencias de ε . Igualando entre sí los coeficientes de potencias del mismo grado se obtienen ecuaciones para $a_k(p)$, β_k . A continuación, por medio de un razonamiento *standard*, se prueba que la asintótica formal aproxima en efecto a la función propia.

Por otra parte las ecuaciones en diferencias surgen frecuentemente en análisis numérico, cuando se busca aproximar sistemas continuos por discretos, y en modelos discretos con aplicaciones (véase [7]), lo que incluye a la mecánica cuántica (véase [12]). En este contexto la pregunta natural de si aparece también un valor propio para la ecuación unidimensional discreta de Schrödinger con un potencial “pequeño” puede contestarse afirmativamente. Primeramente veremos la aparición de valores propios aislados para un potencial rectangular centrado en el origen, hecho del cual se deduce, haciendo uso del principio variacional, la unicidad de los valores propios aislados que aparecen cuando tenemos un pozo de potencial pequeño con forma arbitraria.

Para poder aplicar al caso discreto la técnica de Zhevandrov-Merzon comentada se interpola la ecuación discreta de Schrödinger a todo el

¹Note que el integrando correspondiente sólo tiene 2 polos.

eje real, pasando a continuación a la transformada de Fourier (Secc. 3). El proceso subsecuente, análogo al de la ecuación continua, para la obtención de las aproximaciones asintóticas de los valores propios y funciones propias en el caso de la ecuación discreta, se presenta en la Secc. 5 (véase además [13]). En la Sección 6 se expone una modificación de este acercamiento, obteniéndose como resultado neto una solución exacta al problema del potencial pequeño para la ecuación discreta de Schrödinger (que por supuesto coincide con la expansión asintótica —de hecho convergente— encontrada previamente).

2. El problema y los resultados

Consideremos la versión discreta, usando diferencias divididas finitas centrales, de la ecuación (1), a saber, la ecuación unidimensional discreta de Schrödinger

$$(4) \quad -\frac{1}{h^2}(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}) + \varepsilon V_j \psi_j = E \psi_j, \quad \{\psi_j\} \in \ell_2,$$

donde ψ_j y V_j designan los valores de las funciones $\Psi(x)$ y $V(x)$ en los nodos de la malla (uniforme) con paso $h > 0$, *e. g.*, $\psi_j = \Psi(jh)$, $j \in \mathbf{Z}$, y $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Así $\mathbf{V} \equiv \{V_j\}$ es un potencial discreto de soporte compacto, *i. e.*,

$$(5) \quad V_j = 0, \quad |j| \geq R, \quad R \in \mathbf{R}^+$$

suficientemente grande; así que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \sum_{j=-[R]}^{[R]} V_j$, donde $[R]$ significa la parte entera de R . Podemos entonces escribir $\sum_j V_j$ simplemente. Además, definimos

$$(6) \quad m_0 \equiv |\min V_j|, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

La formulación matemática del problema consiste en la búsqueda de las soluciones no triviales $\{\psi_j\}$ de la Ec. (4) con las condiciones dadas en los párrafos precedentes en esta sección. Enunciamos los siguientes resultados.

Teorema 2.1.1. *Sea $\sum_j V_j \leq 0$. Entonces el único valor propio negativo del problema (4) es $E = -\beta_h^2(\varepsilon)$, donde*

$$(7) \quad \beta_h(\varepsilon) = -\frac{h\varepsilon}{2} \sum_j V_j + \frac{h^4 \varepsilon^2}{16\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \sum_{j,k} V_j V_k e^{i(k-j)h\zeta} \frac{d\zeta}{\sin^2 \frac{h\zeta}{2}} + O(\varepsilon^3)$$

es la solución de la ecuación secular para β (136). El contorno $\Gamma_{s,h}$ está definido por (66). El vector propio perteneciente a este valor propio es $\{\psi_j\}$, donde $\psi_j = \Psi_h(jh)$ y $\Psi_h(x)$ es la transformada inversa de Fourier de

$$(8) \quad \widetilde{\Psi}_h(p) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\beta_h(\varepsilon)} \frac{\frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_j V_j e^{-ijhp} + \varepsilon f_\beta(h, \varepsilon, p)}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{hp}{2} + \beta_h^2(\varepsilon)} \chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p).$$

Aquí f_β es analítica en la banda $B_{\pi/h}$ dada por (55) y $2\pi/h$ -periódica. Además, $\|f_\beta\| = O(1)$ uniformemente en ε , donde $\|\cdot\|$ es la norma del supremo.

Teorema 2.1.2. Sea $\sum_j V_j \geq 0$. Entonces el único valor propio positivo del problema (4) es $E = 4/h^2 + \gamma_h^2(\varepsilon)$, donde

$$(9) \quad \gamma_h(\varepsilon) = \frac{h\varepsilon}{2} \sum_j V_j + \frac{h^4 \varepsilon^2}{16\pi} \int_{\Gamma_{c,h}} \sum_{j,k} (-1)^{j+k} V_j V_k e^{i(k-j)h\zeta} \frac{d\zeta}{\cos^2 \frac{h\zeta}{2}} + O(\varepsilon^3)$$

es la solución de la ecuación secular para γ (145). El contorno $\Gamma_{c,h}$ está definido por (142). El vector propio perteneciente a este valor propio es $\{\psi_j\}$, donde $\psi_j = \Psi_h(jh)$ y $\Psi_h(x)$ es la transformada inversa de Fourier de

$$(10) \quad \widetilde{\Psi}_h(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\gamma_h(\varepsilon)} \frac{\frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_j (-1)^j V_j e^{-ijhp} + \varepsilon f_\gamma(h, \varepsilon, p)}{\frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{hp}{2} + \gamma_h^2(\varepsilon)} \chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p).$$

Aquí f_γ es analítica en la banda $B_{\pi/h}$ dada por (55) y $2\pi/h$ -periódica. Además, $\|f_\gamma\| = O(1)$ uniformemente en ε , donde $\|\cdot\|$ es la norma del supremo.

3. Reducción a un caso continuo

Para aplicar la técnica de Zhevandrov-Merzon comentada en la Introducción, interpolamos la Ec. (4) a todo el eje real. Cuál interpolación es la más recomendable se decide por analogía a lo ocurrido en el caso continuo. Introducimos entonces la siguiente

Definición 3.1.3. Sea el operador D_h dado por $D_h \equiv (E_{h/2} - E_{-h/2})/h$, donde $E_y : L_2(\mathbf{R}) \rightarrow L_2(\mathbf{R})$ es el operador de traslación por $y \in \mathbf{R}$ tal que

$$(11) \quad [E_y u](x) = u(x + y), \quad u \in L_2(\mathbf{R}).$$

Luego la interpolación correspondiente del primer término de (4) resulta ser

$$(12) \quad -[D_h^2 \Psi_{\text{Int}}](x),$$

donde $\Psi_{\text{Int}}(x)$ es una interpolación de $\{\psi_j\}$.

Definición 3.1.4. *El operador pseudodiferencial $L(x, \hat{p}) : L_2(\mathbf{R}) \longrightarrow L_2(\mathbf{R})$, $\hat{p} = -id/dx$ está definido por su símbolo $L(x, p)$ en la siguiente forma [15], [17], [18]*

$$[L(x, \hat{p})u](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{ipx} L(x, p) \tilde{u}(p) dp, \quad u(x) \in L_2(\mathbf{R}).$$

De esta forma, ya que²

$$(13) \quad [E_y u]^\sim(p) = e^{ipy} \tilde{u}(p),$$

tenemos que e^{ipy} es el símbolo del operador de traslación E_y dado por (11). Así

$$[D_h^2 u]^\sim(p) = -\frac{4}{h^2} \text{sen}^2 \frac{hp}{2} \cdot \tilde{u}(p) \quad \text{y} \quad D_h = \frac{2i}{h} \text{sen} \frac{h\hat{p}}{2}.$$

Note que el símbolo de $-d^2/dx^2$ es p^2 , mientras que el de $-D_h^2$ es

$$\frac{4}{h^2} \text{sen}^2 \frac{hp}{2}.$$

Esto ocasiona que el integrando análogo al que aparece en (2) con el ansatz (3) tenga un número infinito de polos. La interpolación para (4) debe ser tal que dicho integrando se anule fuera de un intervalo finito y al reducirse el cálculo de la integral solamente a dicho intervalo, se reduzca a dos a su vez el número de polos efectivos del integrando. Por la forma de la ecuación para los polos, a saber,

$$(14) \quad \frac{4}{h^2} \text{sen}^2 \frac{hz}{2} + \beta^2 = 0,$$

$E = -\beta^2$, $\beta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, el intervalo en cuestión más natural es $[-\pi/h, \pi/h]$. Es decir, dicha interpolación debe pertenecer al espacio

²Usaremos consistentemente la notación $[\dots]^\sim(p)$ para la transformada de Fourier de $[\dots]$.

de Hilbert de las funciones de *banda limitada* a frecuencias $f = p/2\pi$ tales que $f \leq 1/2h$, (véase [6] Lecc. 38) definido por

$$M_h \equiv \left\{ u(x) \in L_2(\mathbf{R}) : \text{supp } \tilde{v}(p) \subset [-\pi/h, \pi/h] \right\}.$$

Introduzcamos entonces la función seno cardinal dada mediante la fórmula $\text{senc } x \equiv \text{sen } x / x$, $x \neq 0$; $\text{senc } 0 = 1$. Si $b \in \mathbf{R}^+$,

$$(15) \quad [\text{senc } bx]^\sim(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{b} \chi_{[-b, b]}(p),$$

donde χ_I denota la función característica del conjunto I . Observemos que la familia de traslaciones de funciones seno cardinal dada por

$$(16) \quad \left\{ \text{senc } \pi \left(\frac{x}{h} - j \right) \right\}_{j \in \mathbf{Z}}$$

constituye una base ortogonal para M_h ya que el intervalo $[-\pi/h, \pi/h]$ es el soporte de la transformada de Fourier

$$\left[\text{senc } \pi \left(\frac{x}{h} - j \right) \right]^\sim(p) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p) e^{-ijhp}$$

de cada miembro de dicha familia y

$$(17) \quad \int_{\mathbf{R}} \text{senc } \pi(x - k) \text{senc } \pi(x - l) dx = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbf{Z},$$

donde δ_{jk} es el símbolo de Kronecker. Por ello usamos para la Ec. (4) la interpolación definida en seguida.

Definición 3.1.5. Para una sucesión dada $\{v_j\} \in \ell_2$ definimos la interpolación de Whittaker-Kotelnikov $v_h(x)$ por

$$(18) \quad v_h(x) \equiv [\text{Kot}_h\{v_j\}](x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j \text{senc } \pi(x/h - j).$$

La transformada de Fourier de (18) es entonces

$$(19) \quad \tilde{v}_h(p) \equiv [\text{Kot}_h\{v_j\}]^\sim(p) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p) \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j e^{-ijhp}.$$

Nota 3.1.6. Por el teorema de Riesz-Fischer, $v_h(x) \in M_h$; de hecho, el soporte de $[\text{Kot}_h\{v_j\}]^\sim(p)$ sigue siendo $[-\pi/h, \pi/h]$.

Aplicando la fórmula (18) al primer término en la Ec. (4) obtenemos

$$(20) \quad \left[\text{Kot}_h \frac{1}{h^2} \{ \psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1} \} \right] (x) \\ = \frac{1}{h^2} (\Psi_h(x+h) - 2\Psi_h(x) + \Psi_h(x-h)).$$

Por (12) vemos que el lado derecho de (20) es igual a $[D_h^2 \Psi_h](x)$, con $D_h^2 : M_h \longrightarrow M_h$.

Definición 3.1.7. Sea $\widehat{V}_h : L_2(\mathbf{R}) \longrightarrow M_h$ el operador tal que

$$(21) \quad [\widehat{V}_h u](x) = [\text{Kot}_h \{ V_j u_j \}](x), \quad u \in L_2(\mathbf{R}), \quad u_j = u(jh).$$

Nota 3.1.8. $\widehat{V}_h$ puede representarse en la forma integral

$$(22) \quad [\widehat{V}_h u](x) = \int_{\mathbf{R}} K_h(x, x') u_h(x') dx'$$

con núcleo

$$(23) \quad K_h(x, x') = \frac{1}{h} \sum_j V_j \text{senc } \pi(x/h - j) \text{senc } \pi(x'/h - j).$$

En efecto, sustituimos (23) y la fórmula (18) aplicada a $u_h(x)$ en el lado derecho de (22). Obtenemos (21) observando la propiedad (17).

Luego la interpolación del segundo término en la Ec. (4) es igual a $[\widehat{V}_h \Psi_h](x)$, con $\widehat{V}_h : M_h \longrightarrow M_h$. Finalmente obtenemos para el problema (4) la ecuación interpolada a todo $\mathbf{R}$:

$$(24) \quad \left(-D_h^2 + \varepsilon \widehat{V}_h \right) \Psi_h = E \Psi_h,$$

análoga a (1).

Definición 3.1.9. Al operador pseudodiferencial $\widehat{H}_{h,\varepsilon} : M_h \longrightarrow M_h$ dado por

$$(25) \quad \widehat{H}_{h,\varepsilon} \equiv -D_h^2 + \varepsilon \widehat{V}_h,$$

que actúa sobre Ψ_h en el lado izquierdo de (24), lo llamamos operador discreto de Schrödinger (aunque involucra una variable continua).

El paso a la transformada de Fourier de la interpolación de Whittaker-Kotelnikov (24) de la ecuación discreta de Schrödinger viene caracterizada por el siguiente

Lema 3.1.10. $\widetilde{\Psi}_h(p)$ (usamos la definición (19)) satisface la ecuación

$$(26) \quad \left(\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{hp}{2} - E \right) \widetilde{\Psi}_h(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} W(p-p') \widetilde{\Psi}_h(p') dp'$$

en $p \in [-\pi/h, \pi/h]$. Aquí $W(p)$ denota la $2\pi/h$ -continuación periódica a todo $\mathbf{R}$ de $\widetilde{V}_h(p)$ (la transformada de Fourier de $V_h(x)$) y está dada por

$$(27) \quad W(p) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_j V_j e^{-ijhp}.$$

Nota 3.1.11. Note que $W(p) \in C^\infty(\mathbf{R}_p)$ y depende de h también.

Demostración: Sustituimos $(1/\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbf{R}} e^{-ip'x'} \Psi_h(x') dx'$ en lugar de $\widetilde{\Psi}_h(p')$ en el integrando de (26), y suponemos que el lado derecho de (26) está multiplicado por $\chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p)$. Aplicando la transformada inversa de Fourier a (26), tenemos

$$\begin{aligned} & (-D_h^2 - E) \Psi_h(x) \\ &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ipx} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} W(p-p') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x'} \Psi_h(x') dx' dp' dp \\ &= -\frac{h\varepsilon}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_j V_j e^{ipx-ijh(p-p')-ip'x'} dp' dp \Psi_h(x') dx' \\ &= -\frac{\varepsilon}{h} \int_{\mathbf{R}} \sum_j V_j \operatorname{senc} \pi(x/h - j) \operatorname{senc} \pi(x'/h - j) \Psi_h(x') dx'. \end{aligned}$$

Igualando la primera y última líneas, usando (22) y transponiendo obtenemos (24). $\square$

Vamos ahora a precisar el espectro del operador que actúa en el lado izquierdo de la Ec. (4), a saber, $\widehat{H}_{d,h,\varepsilon} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ tal que

$$(28) \quad \widehat{H}_{d,h,\varepsilon} \{\psi_j\} = -D_{d,h}^2 \{\psi_j\} + \varepsilon \{V_j \psi_j\},$$

donde $D_{d,h} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ (que es un operador acotado) actúa de la forma

$$D_{d,h}^2 \{\psi_j\} = \frac{1}{h^2} \{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}\}$$

y $\{V_j\}$ es el potencial discreto de soporte compacto de la misma Ec. (4). Tenemos entonces que $\widehat{H}_{d,h,\varepsilon}\{\psi_j\} = [H_{h,\varepsilon}\Psi_h](jh)$, donde la sucesión $\{\psi_j\} \in \ell_2$ y $\Psi_h(x) \equiv [\text{Kot}_h\{\psi_j\}](x)$. El operador $D_{d,h}^2$ es simétrico:

$$(29) \quad \sum_j (\psi_{j+1} + \psi_{j-1}) \bar{\psi}_j = \sum_k (\psi_{k-1} \bar{\psi}_k + \psi_k \bar{\psi}_{k-1}),$$

donde la suma del lado derecho es real ya que $\psi_{k-1} \bar{\psi}_k + \psi_k \bar{\psi}_{k-1} = 2\{\text{Re}\psi_{k-1}\text{Re}\psi_k + \text{Im}\psi_{k-1}\text{Im}\psi_k\}$, y por la igualdad (29),

$$(30) \quad \sum_j (\psi_{j+1} + \psi_{j-1}) \bar{\psi}_j = \sum_l \psi_l (\bar{\psi}_{l+1} + \bar{\psi}_{l-1}).$$

Puesto que el término $\varepsilon\{V_j\psi_j\}$ en (28) es una perturbación autoadjunta y compacta en $\ell_2(\mathbf{Z})$ del operador $-D_{d,h}^2$, el teorema de Weyl nos indica que el espectro esencial de (4) coincide con el de la ecuación libre ($V_j \equiv 0$). Entonces tenemos el siguiente

Lema 3.1.12. *El espectro esencial $\sigma_{\text{ess}}(\widehat{H}_{d,h,\varepsilon})$ del operador $\widehat{H}_{d,h,\varepsilon}$ es el intervalo $[0, 4/h^2]$ del eje real.*

Demostración: En efecto, sea $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [0, 4/h^2]$. Tenemos que $\lambda + D_h^2$ es uno-uno, ya que $\left(\lambda - \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{hp}{2}\right) \tilde{u}(p) = 0$ implica $u = 0$. Si para $v \in M_h$ existe alguna $u \in M_h$ tal que $(\lambda + D_h^2)u = v$, entonces

$$u = (\lambda + D_h^2)^{-1}v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{e^{ipx} \tilde{v}(p)}{\lambda - \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{hp}{2}} dp.$$

Vemos que el operador $(\lambda + D_h^2)^{-1}$ es acotado:

$$\begin{aligned} \|(\lambda + D_h^2)^{-1}v\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 &= v \left\| \frac{\tilde{v}(p)}{\lambda - \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{hp}{2}} \right\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 \\ &\leq \frac{1}{m_1^2} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\tilde{v}(p)|^2 dp = \frac{1}{m_1^2} \|v\|_{L_2(\mathbf{R})}^2, \end{aligned}$$

donde m_1 es la distancia de λ al segmento $[0, 4/h^2]$. Luego $\mathbf{C} \setminus [0, 4/h^2] \subset$ el conjunto resolvente $\rho(-D_h^2)$.

Tomemos ahora $\lambda \in [0, 4/h^2]$ y consideremos la sucesión de funciones $u_v(x) \in M_h$, $v > 0$, $v \rightarrow 0^+$ tales que

$$\widetilde{u}_v(p) = \frac{v^{-1/4}}{\sqrt{2}r_v} \chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p) e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4v}} e^{ip_0 p}, \quad r_v \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi/h+p_0}{\sqrt{2v}}}^{\frac{\pi/h-p_0}{\sqrt{2v}}} e^{-\tau^2} d\tau,$$

donde $p_0 \in \mathbf{R}^+$ es una solución de la Ec. (14) con $\beta^2 = -\lambda$. Nótese que $r_v \rightarrow \sqrt{\pi/2}$, $v \rightarrow 0^+$. Tenemos entonces que

$$\|u_v\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 = \frac{v^{-1/2}}{2r_v} \sqrt{2v} \int_{-\frac{\pi/h+p_0}{\sqrt{2v}}}^{\frac{\pi/h-p_0}{\sqrt{2v}}} e^{-\tau^2} d\tau = 1,$$

donde $\tau^2 = (p - p_0)^2/2v$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \|(\lambda + D_h^2)u_v\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 &= \frac{16}{h^4} \left\| \left(\sin^2 \frac{hp_0}{2} - \sin^2 \frac{hp}{2} \right) \widetilde{u}_v \right\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 \\ &= \frac{8v^{-1/2}}{h^4 r_v} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} (p - p_0)^2 F^2(p, p_0) e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2v}} dp \\ &\leq \frac{16\sqrt{2}M_0 v}{h^4 r_v} \int_{-\frac{\pi/h+p_0}{\sqrt{2v}}}^{\frac{\pi/h-p_0}{\sqrt{2v}}} \tau^2 e^{-\tau^2} d\tau \\ &= \frac{8\sqrt{2}M_0 v}{h^4 r_v} \left(\sqrt{2}r_v - \sqrt{\frac{2}{v}} \frac{\pi}{h} e^{-\frac{(\pi/h-p_0)^2}{2v}} \right) \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

donde

$$F(p, p_0) = \int_0^1 \left(\sin^2 \frac{h\xi}{2} \right)'_{\xi} \Big|_{\xi=p_0+s(p-p_0)} ds \in C^\infty(\mathbf{R}_p)$$

(lema de Hadamard) y M_0 es el máximo de $F(p, p_0)$ en $[-\pi/h, \pi/h]$. Luego $\sigma_{\text{ess}}(-D_{d,h}^2) = \sigma_{\text{ess}}(\widehat{H}_{d,h,\varepsilon}) = [0, 4/h^2]$. $\square$

4. Unicidad de los Valores Propios

Comenzaremos enunciando el siguiente

Lema 4.1.13. *Sea*

$$(31) \quad V_j = \pm m \sum_{k=-N}^N \delta_{jk},$$

$m > 0$, $N \in \mathbf{N}$, donde δ_{jk} es el símbolo de Kronecker. Entonces el único valor propio del problema (4) es $E = 4 + \gamma^2(\varepsilon)$ (si se toma el signo + en (31)) o $E = -\beta^2(\varepsilon)$ (si se toma el signo - en (31)), donde

$$(32) \quad \beta = \gamma = (2N + 1)mh\varepsilon/2 + O(\varepsilon^2).$$

Demostración: Consideremos primeramente la Ec. (4) cuando $V_j = -m\chi_{\{0\}}(j)$, con $m > 0$, $E = -\beta^2(\varepsilon)$, $\beta > 0$, $\beta \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$(-\psi_{j+1} + 2\psi_j - \psi_{j-1})/h^2 - \chi_{\{0\}}(j) m\varepsilon\psi_j = -\beta^2\psi_j,$$

de donde tenemos

$$(33) \quad \psi_{j+1} + (\chi_{\{0\}}(j) m\varepsilon - 2/h^2 - \beta^2) h^2\psi_j + \psi_{j-1} = 0.$$

Buscamos $\psi = \{\psi_j\}$ con

$$(34) \quad \|\psi\|_{\ell_2(\mathbf{Z})} = 1$$

para la Ec. (33), y encontramos β , como función de la profundidad $m\varepsilon$ del potencial $\{\varepsilon V_j\}$. Para ello procedemos a resolver la ecuación

$$(35) \quad \psi_{j+1} + (Vm h^2\varepsilon - p_1(\beta))\psi_j + \psi_{j-1} = 0,$$

donde V es una constante (no depende de j) igual a 0 o 1, y donde

$$(36) \quad p_1(\beta) = 2 + h^2\beta^2.$$

Proponemos una solución $\{r_V^j\}$, donde r_V denota una constante distinta de 0 (no depende de j pero sí de V); tenemos ahora la ecuación algebraica para r_V

$$r_V^2 + (Vm h^2\varepsilon - p_1) r_V + 1 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$(37) \quad r_{V\pm} = 1 + \frac{\beta^2 - Vm\varepsilon}{2} h^2 \pm h \sqrt{(\beta^2 - Vm\varepsilon) \left(1 + \frac{\beta^2 - Vm\varepsilon}{4} h^2 \right)}.$$

La solución general de la Ec. (35) está dada por $\psi_V = \{\psi_{V,j}\}$ con

$$(38) \quad \psi_{V,j} = A_V r_{V+}^j + B_V r_{V-}^j,$$

donde A_V, B_V son constantes arbitrarias. Así, la solución general de la Ec. (33) está dada por $\psi = \{\psi_j\}$ con

$$\psi_j = \chi_{\{0\}}(j)\psi_{1,j} + \chi_{\mathbf{Z} \setminus \{0\}}(j)\psi_{0,j}.$$

Para satisfacer la condición (34) hacemos $C = A_1 + B_1$, $B_0 = B\chi_{\mathbf{Z}^+}(j)$ y $A_0 = A\chi_{\mathbf{Z}^-}(j)$. Así

$$(39) \quad \psi_j = \begin{cases} Ar_+^j, & j \leq -1; \\ C, & j = 0; \\ Br_-^j, & j \geq 1, \end{cases}$$

donde $r_{\pm} = r_{0\pm}$. En particular

$$(40) \quad \begin{aligned} \psi_{-2} &= Ar_+^{-2}, & \psi_{-1} &= Ar_+^{-1}, & \psi_0 &= C, \\ \psi_1 &= Br_+, & \psi_2 &= Br_-^2. \end{aligned}$$

Pegando las tres secciones de (39) observando que (33) es satisfecha cuando $j = -1$, $j = 0$ y $j = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \psi_0 - p_1\psi_{-1} + \psi_{-2} &= 0, \\ \psi_1 + (mh^2\varepsilon - p_1)\psi_0 + \psi_{-1} &= 0, \\ \psi_2 - p_1\psi_1 + \psi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo las correspondientes ψ_j 's dadas por (40) en estas ecuaciones obtenemos

$$(41) \quad \begin{aligned} C - p_1Ar_+^{-1} + Ar_+^{-2} &= 0, \\ Br_- + (mh^2\varepsilon - p_1)C + Ar_+^{-1} &= 0, \\ Br_-^2 - p_1Br_- + C &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema tiene soluciones no triviales para A, B y C si

$$(42) \quad \begin{vmatrix} -p_1r_+^{-1} + r_+^{-2} & 0 & 1 \\ r_+^{-1} & r_- & mh^2\varepsilon - p_1 \\ 0 & r_-^2 - p_1r_- & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Note que

$$(43) \quad r_{\pm} = 1 + \frac{h^2\beta^2}{2} \pm h\beta\sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}},$$

el cual se obtiene haciendo $V = 0$ en (37); además, note que $r_+r_- = 1$, $r_+ + r_- = p_1$. Por lo tanto, simplificando (42) se convierte en

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ r_- & r_- & mh^2\varepsilon - p_1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto nos provee la ecuación

$$2r_- + mh^2\varepsilon - p_1 = 0,$$

de la cual, de acuerdo a (36) y (43), podemos escribir en su turno

$$(44) \quad mh\varepsilon - 2\beta\sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}} = 0.$$

Considere la función

$$(45) \quad F_r(\beta, \varepsilon) = mh\varepsilon - 2\beta\sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}}.$$

Así tenemos que la función $F_r(\beta, \varepsilon)$ es continuamente diferenciable en cada argumento. Además, $F_r(0, 0) = 0$, y como

$$\partial_\beta F_r = -\frac{2 + h^2\beta^2}{\sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}}},$$

tenemos que $[\partial_\beta F_r](0, 0) = -2$. De aquí que, por el teorema de la función implícita, la solución $\beta(\varepsilon)$ para β de la ecuación secular (44), la cual tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe, es única y está dada por (47). Para encontrar esta última expresión tenemos, de la Ec. (44), que

$$(46) \quad mh\varepsilon = 2\beta\sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}}.$$

Ya que

$$\sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}} = 1 + O(h^2\beta^2)$$

cuando $\beta \rightarrow 0$, sustituimos la última expresión en (46) y obtenemos

$$(47) \quad \beta = \frac{mh\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2).$$

Resolviendo el sistema (41) tenemos que $A = B = C$. Aquí la constante libre, digamos C , se determina por la condición (34).

Consideremos ahora la Ec. (4) en el caso en que $V_j = m\chi_{\{0\}}(j)$, $m > 0$. Suponga además que $E = 4 + \gamma^2(\varepsilon)$, $\gamma > 0$, $\gamma \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Por un proceso análogo al precedente también tenemos que γ es único y está dado por $\gamma = mh\varepsilon/2 + O(\varepsilon^2)$. En forma similar, consideremos la Ec. (4) cuando V_j está dado por (31), es decir, cuando $\mathbf{V}$ es un potencial discreto de barrera (tomando el signo $+$ en (31) o pozo (tomando el signo $-$) que tiene altura o profundidad m , respectivamente, sobre $[-Nh, Nh]$, y que vale 0 en cualquier otro lugar. Suponga además que $E = 4 + \gamma^2(\varepsilon)$ (para la barrera) o $E = -\beta^2(\varepsilon)$ (para el pozo), $\beta, \gamma > 0$, $\beta, \gamma \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Por un proceso análogo a los de los potenciales previamente analizados en esta demostración podemos ver que β o γ son únicos, para los casos del pozo o la barrera respectivamente, y están dados por (32). $\square$

Ahora vamos a abordar la cuestión de la unicidad de los valores propios para el problema (4). Tenemos el siguiente

Lema 4.1.14. *Supongamos que existe algún valor propio $E = -\beta^2(\varepsilon)$, $\beta > 0$, $\beta \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$, para el problema (4). Entonces para ε suficientemente pequeño tal valor propio es único.*

Demostración: Sea el operador $\widehat{H}_{d_1, h, \varepsilon} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ tal que

$$\widehat{H}_{d_1, h, \varepsilon} \{\psi_j\} = \{-(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1})/h^2 - m_0\varepsilon\chi_{[-[R], [R]]}(j)\psi_j\},$$

siendo R la referida en (5) y m_0 el definido en (6). Observemos que este operador es un caso particular del operador $\widehat{H}_{d, h, \varepsilon}$, lo que podemos ver sustituyendo en el lado izquierdo de la Ec. (28) el potencial V_j dado por el signo negativo de (31), con $m = m_0$ y $N = [R]$. El potencial discreto del operador $\widehat{H}_{d_1, h, \varepsilon}$ es un pozo rectangular de profundidad m_0 que va de $-[R]h$ a $[R]h$. Este potencial lo expresamos como

$$\{V_{j,1}\} \equiv -m_0 \{\chi_{\{j \in \mathbf{Z} : |j| < R\}}(j)\}.$$

Recordemos que $\widehat{H}_{d_1, h, \varepsilon}$ y $\widehat{H}_{d, h, \varepsilon}$ son autoadjuntos. Por otra parte tenemos que los potenciales de ambos operadores están acotados por debajo por $-m_0$, a saber,

$$(48) \quad -m_0 \leq V_{j,1} \leq V_j, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Luego $\widehat{H}_{d_1, h, \varepsilon}$ y $\widehat{H}_{d, h, \varepsilon}$ son operadores que están acotados por debajo. En efecto, observemos que $-D_{d, h}^2$ es un operador no negativo ya que pasando a la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ de su interpolación de Whittaker-Kotelnikov tenemos

$$\langle -D_{d, h}^2 \{\psi_j\}, \{\psi_j\} \rangle \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \text{Kot}_h} \frac{4}{h^2} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \sin^2 \frac{hp}{2} |\widetilde{\Psi}_h(p)|^2 dp \geq 0,$$

de lo cual

$$\langle \widehat{H}_{d, h, \varepsilon} \{\psi_j\}, \{\psi_j\} \rangle \geq \varepsilon \sum_j V_j |\psi_j|^2 \geq -\varepsilon m_0 \|\{\psi\}\|_{\ell_2(\mathbf{Z})}^2.$$

También, de (48) y del hecho de que el dominio de definición de estos operadores es todo el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbf{Z})$ puede verse que

$$\widehat{H}_{d_1, h, \varepsilon} \leq \widehat{H}_{d, h, \varepsilon}.$$

Luego, siendo

$$N(\lambda; T), \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

la función de distribución del espectro de T sobre el intervalo $(-\infty, \lambda)$, se cumple que ([2], Secc. S1.3, Prop. 3.1 y [14], Teorema 1.6)

$$N\left(0; \widehat{H}_{d, h, \varepsilon}\right) \leq 1$$

para ε suficientemente pequeño, ya que, según la conclusión del Lema 4.1.13,

$$N\left(0; \widehat{H}_{d_1, h, \varepsilon}\right) = 1$$

en este caso. Así, hemos mostrado que para ε suficientemente pequeño, el valor propio del operador $\widehat{H}_{d_1, h, \varepsilon}$, si existe, es único. $\square$

De manera análoga, tenemos el siguiente

Lema 4.1.15. *Supongamos que existe algún valor propio $E = 4/h^2 + \gamma^2(\varepsilon)$, $\gamma > 0$, $\gamma \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$, para el problema (4). Entonces para ε suficientemente pequeño se tiene también la unicidad de tal valor propio.*

Demostración: En efecto, la Ec. (4) con las condiciones ahora mencionadas se puede reducir a

$$\frac{1}{h^2} (\psi_{j+1} + 2\psi_j + \psi_{j-1}) - \varepsilon V_j \psi_j = -\gamma^2 \psi_j, \quad \{\psi_j\} \in \ell_2,$$

Definimos el operador $\widehat{H}'_{d,h,\varepsilon} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ como aquel tal que

$$(49) \quad \widehat{H}'_{d,h,\varepsilon} \{\psi_j\} = D_{d,h}'^2 \{\psi_j\} + \varepsilon \{V_j' \psi_j\},$$

donde $D_{d,h}' : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ es tal que actúa de la forma

$$D_{d,h}'^2 \{\psi_j\} = \frac{1}{h^2} \{\psi_{j+1} + 2\psi_j + \psi_{j-1}\}$$

y $\{V_j'\} \equiv -\{V_j\}$. Además el operador $\widehat{H}'_{d_1,h,\varepsilon} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ es aquel tal que

$$\widehat{H}'_{d_1,h,\varepsilon} \{\psi_j\} = \{(\psi_{j+1} + 2\psi_j + \psi_{j-1})/h^2 - m'_0 \varepsilon \chi_{[-R],[R]}(j) \psi_j\},$$

siendo R la referida en (5) y m'_0 el que corresponde a V_j' según (6). Note que $\widehat{H}'_{d_1,h,\varepsilon}$ es un caso particular de $\widehat{H}'_{d,h,\varepsilon}$. Como se da la igualdad (30), el operador $D_{d,h}'^2$ es simétrico y, por su dominio de definición, autoadjunto. El operador de multiplicación por una sucesión finita cuyo resultado es la sucesión en el último término de (49), es autoadjunto y compacto en $\ell_2(\mathbf{Z})$, ya que la simetría de dicho operador viene de que $V_j' \in \mathbf{R}$ y la compacidad se ve de manera similar a como se hace para el operador de multiplicación por una sucesión finita de (28). Tenemos entonces que $\widehat{H}'_{d_1,h,\varepsilon}$ y $\widehat{H}'_{d,h,\varepsilon}$ son también autoadjuntos. Además los potenciales de ambos operadores están acotados por debajo por $-m'_0$:

$$(50) \quad -m'_0 \leq V_{j,1}' \leq V_j', \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Por ello $\widehat{H}'_{d_1,h,\varepsilon}$ y $\widehat{H}'_{d,h,\varepsilon}$ están acotados por debajo, ya que $D_{d,h}'^2$ es un operador no negativo, a saber,

$$\langle D_{d,h}'^2 \{\psi_j\}, \{\psi_j\} \rangle \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \text{Kot}_h} \frac{4}{h^2} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \cos^2 \frac{hp}{2} |\widetilde{\Psi}_h(p)|^2 dp \geq 0,$$

de lo cual

$$\langle \widehat{H}'_{d,h,\varepsilon} \{\psi_j\}, \{\psi_j\} \rangle \geq -\varepsilon m'_0 \|\{\psi\}\|_{\ell_2(\mathbf{Z})}^2.$$

También, de (50) y del hecho de que el dominio de definición de estos operadores es $\ell_2(\mathbf{Z})$, puede verse que

$$\widehat{H}'_{d_1,h,\varepsilon} \leq \widehat{H}'_{d,h,\varepsilon}.$$

Luego podemos concluir que

$$N\left(0; \widehat{H}'_{d,h,\varepsilon}\right) \leq 1$$

para ε suficientemente pequeño, ya que

$$N\left(0; \hat{H}'_{d_1, h, \varepsilon}\right) = 1$$

para este caso según lo dicho en la conclusión del Lema 4.1.13. Así, hemos mostrado que para ε suficientemente pequeño, el valor propio del operador $\hat{H}'_{d_1, h, \varepsilon}$, si existe, es único. $\square$

5. La Solución Asintótica

En esta sección daremos, considerando

$$(51) \quad \sum_{j=-[R/h]}^{[R/h]} V_j < 0.$$

en la Ec. (4), la construcción de un vector propio asintótico uniforme $\psi_n = \{\psi_{nj}\}$ del vector propio normalizado ψ (en adelante en esta sección omitiremos el subíndice fijo h), dado por

$$(52) \quad \psi_{nj} = \frac{c(\varepsilon)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ihpj} \frac{A_n(p)}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{hp}{2} + (\varepsilon B_n)^2} dp,$$

donde

$$(53) \quad A_n(p) = a_0(p) + \varepsilon a_1(p) + \dots + \varepsilon^n a_n(p),$$

$$a_0(p) = \frac{1}{\sum_{j=-[R/h]}^{[R/h]} V_j} \sum_{j=-[R/h]}^{[R/h]} V_j e^{-ihpj},$$

$$(54) \quad B_n = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \dots + \varepsilon^n \beta_n, \quad \beta_0 = -\frac{h}{2} \sum_{j=-[R/h]}^{[R/h]} V_j,$$

siendo $\beta_1, \dots, \beta_n$ determinados por el sistema de ecuaciones (98)–(103).

Las funciones $a_k(p)$, $k = 1, \dots, n$ son analíticas en la banda

$$(55) \quad B_{\pi/h} = \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \pi/h\}$$

y se determinan por medio del sistema de ecuaciones (98)–(103) también. $c(\varepsilon)$ es una constante de normalización dada por

$$(56) \quad c(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2} (d_0 + d_1 \varepsilon + \dots + d_n \varepsilon^n), \quad d_0 = \sqrt{\frac{2\beta_0^3}{\pi}},$$

donde los valores restantes $d_1, d_2, \dots, d_n$ se determinan mediante el sistema de ecuaciones (125). ψ_n pertenece al valor propio

$$(57) \quad E = -\varepsilon^2 B_n^2 + O(\varepsilon^{n+5/2})$$

y satisface las condiciones

$$(58) \quad \begin{aligned} \|\psi_n\| &= 1 + O(\varepsilon^{n+1}), \\ \|\psi - \psi_n\| &= O(\varepsilon^{n+1/2}) \end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. La norma es la de $\ell_2(\mathbf{Z})$. El proceso de esta construcción se modifica ligeramente cuando $\sum_{-[R/h]}^{[R/h]} V_j = 0$ (véanse [19], [20]) y cuando $\sum_{-[R/h]}^{[R/h]} V_j > 0$.

Definición 5.1.16. Denotemos por Ω_h el espacio de funciones analíticas sobre $B_{\pi/h}$, continuas en su cerradura y $2\pi/h$ -periódicas. Usamos la norma del supremo en Ω_h , $\|\phi\| = \sup_{z \in B_{\pi/h}} |\phi(z)|$ para todo $\phi \in \Omega_h$.

Buscamos la solución aproximada de la ecuación (26) en la forma (prescindimos del subíndice h)

$$(59) \quad \tilde{\psi}_n(p) = \frac{A_n(p)}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{hp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2},$$

donde $A_n(p)$ está dado por (53) con las funciones $a_k(p) \in \Omega_h$, para buscar la asintótica respecto a ε , suponiendo que $a_0(p) \not\equiv 0$ y denotando explícitamente

$$(60) \quad B_n = \beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \dots + \varepsilon^n\beta_n.$$

El nivel de la energía aproximado es

$$(61) \quad E_n = -\varepsilon^2 B_n^2.$$

La solución buscada deberá satisfacer las condiciones de normalización

$$(62) \quad a_0(0) = 1, \quad a_k(0) = 0, \quad k = 2, \dots, n.$$

Construiremos tales valores de $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ y funciones $a_0(p), \dots, a_n(p)$ de forma que $\tilde{\psi}_n(p)$ satisfaga la ecuación (26) hasta $O(\varepsilon^{n+1})$, donde $\|O(\varepsilon^{n+1})\|_{L_2(\mathbf{R})} \leq \text{Const } \varepsilon^{n+1}$. Sustituyendo (59) y (61) en (26) obtenemos una ecuación equivalente

$$(63) \quad A_n(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{W(p-p') A_n(p') dp'}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{hp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2}.$$

Requerimos el desarrollo asintótico de la integral

$$(64) \quad \int_{[-\pi/h, \pi/h]} \frac{\phi(z)}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{hz}{2} + \beta^2} dz$$

cuando $\beta \rightarrow 0^+$, donde $\phi(z) \in \Omega_h$. El integrando en (64) es singular en el origen cuando $\beta = 0$. Note que, por los ceros de la expresión $\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{hz}{2} + \beta^2$, la continuación analítica $\widetilde{\Psi}_h(z)$ de $\widetilde{\Psi}_h(p)$ a todo el plano complejo $\mathbf{C}$ tiene polos simples $2k\pi/h \pm z_{\beta,h}$, $k \in \mathbf{Z}$, donde $z_{\beta,h}$ está dado por

$$(65) \quad z_{\beta,h} = -\frac{2i}{h} \ln \left(-\frac{h\beta}{2} + \sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}} \right).$$

Sin embargo, $\pm z_{\beta,h}$ son las singularidades de $\widetilde{\Psi}_h$ en $|\operatorname{Re} z| \leq \pi/h$ cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Usamos entonces el método basado en el cálculo de residuos (véase [4]). Cambiamos el contorno de integración en el plano complejo en tal forma que el polo $z = z_{\beta,h}$ esté alejado de él. Introducimos así el contorno

$$(66) \quad \Gamma_{s,h} := [-\pi/h, -1] \cup \{p + iq : p^2 + q^2 = 1, q > 0\} \cup [1, \pi/h].$$

Si

$$(67) \quad \beta < \frac{2}{h} \operatorname{senh} \frac{h}{2}$$

entonces $z_{\beta,h}$ está localizado debajo de $\Gamma_{s,h}$. Por el teorema del residuo de Cauchy,

$$\begin{aligned} & \int_{[-\pi/h, \pi/h]} \frac{\phi(\zeta) d\zeta}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2} + \beta^2} \\ &= \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{\phi(\zeta) d\zeta}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2} + \beta^2} + 2\pi i \operatorname{Res}_{\zeta=z_{\beta,h}} \frac{\phi(\zeta)}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2} + \beta^2} \\ &= \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{\phi(\zeta) d\zeta}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2} + \beta^2} + \frac{\pi}{\beta} \phi(z_{\beta,h}) \sec \frac{hz_{\beta,h}}{2}. \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$(68) \quad \begin{aligned} & \int_{[-\pi/h, \pi/h]} \frac{\phi(\zeta) d\zeta}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2} + \beta^2} \\ &= \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{\phi(\zeta) d\zeta}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2} + \beta^2} + \frac{\pi}{\beta \sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}}} \phi(i|z_{\beta,h}|). \end{aligned}$$

Atendiendo ahora al último término de (68), evaluemos el desarrollo de ϕ en $\zeta = z_{\beta,h}$, haciendo primero la siguiente

Definición 5.1.17. Para cada $\mathbf{x} = \{x_m\}$ e $\mathbf{y} = \{y_m\}$, $y_m \in \mathbf{C}$, $m = 0, 1, \dots$, definimos

$$(69) \quad c_{k,j}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \chi_{\{0\}}(j), & k = 0; \\ y_j, & k = 1; \\ \sum_{j_2=0}^{j_1(j,2)} \cdots \sum_{j_k=0}^{j_1(j,k)} y_{j_2} \cdots y_{j_k} y_{j_1(j,k)-j_k}, & k > 1; \end{cases}$$

$$(70) \quad d_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^j x_k c_{k,j-k}(\mathbf{y})$$

donde $j_k = 0, 1, \dots, j_1(j, k)$,

$$j_1(j, r) = j - j(r) \sum_{r_1=2}^{r-j(r)} j_{r_1}, \quad j(r) = \chi_{\mathbf{N} \setminus \{2\}}(r), \quad \sum_{r_1=2}^r j_{r_1} \leq j, \quad r = 2, \dots$$

Lema 5.1.18. Sea $\phi(z) \in \Omega_h$. Entonces

$$(71) \quad \phi(i|z_{\beta,h}|) = \sum_{k=0}^n d_k(\phi, \mathbf{l})(h\beta)^k + U_n(h\beta) + O((h\beta)^{n+1})$$

cuando $\beta \rightarrow 0^+$, donde

$$(72) \quad \phi = \left\{ \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} i^m \right\},$$

$$(72) \quad \mathbf{l} = \{l_m\}, \quad l_m = -\frac{2}{h} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k+1} c_{k+1,m-k}(\mathbf{b})$$

$$\mathbf{b} = \{b_m\}, \quad b_m = \begin{cases} -1/2, & m = 0; \\ (-1/8)^{(m+1)/2} \prod_{k_1=0}^{(m-1)/2} \frac{2k_1-1}{k_1+1}, & m \text{ impar}; \\ 0, & m \text{ par} > 0. \end{cases}$$

$$(73) \quad U_n(h\beta) = \frac{i^{n+1} M_n(h\beta) (h\beta)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-z)^n \phi^{(n+1)}(iZ_n(h\beta)z) dz;$$

$$M_n(h\beta) = \sum_{j=0}^n c_{n+1,j}(\mathbf{l})(h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}),$$

$$Z_n(h\beta) = \sum_{j=1}^n c_j (h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}), \quad c_j = -d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{a} = \{a_m\}, \quad a_m = \begin{cases} 0, & m = 0; \\ \frac{(-1)^{m-1}}{m}, & m > 0. \end{cases}$$

Demostración: Evaluemos el desarrollo de ϕ en $z_{\beta,h}$:

$$\phi(i|z_{\beta,h}|) = \sum_{k=0}^n \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} (i|z_{\beta,h}|)^k + \frac{1}{n!} \int_0^{i|z_{\beta,h}|} \phi^{(n+1)}(\zeta) (i|z_{\beta,h}| - \zeta)^n d\zeta.$$

Factorizando $(i|z_{\beta,h}|)^n$ en el integrando, haciendo $z = \zeta/i|z_{\beta,h}|$ y simplificando obtenemos

$$(74) \quad \begin{aligned} \phi(i|z_{\beta,h}|) &= \sum_{k=0}^n \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} (i|z_{\beta,h}|)^k \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-z)^n \phi^{(n+1)}(i|z_{\beta,h}|z) dz (i|z_{\beta,h}|)^{n+1}. \end{aligned}$$

Ahora expresemos cada una de las potencias de $z_{\beta,h}$ en serie de potencias de $h\beta$. Para las sucesiones $\mathbf{a} = \{a_m\}$ y $\mathbf{b} = \{b_m\}$, $a_m, b_m \in \mathbf{R}$, $m = 0, 1, \dots$ y la serie

$$(75) \quad \sum_{j=0}^n b_j z^j + O(z^{n+1}), \quad b_0 \neq 0, \quad z \rightarrow 0$$

se tiene

$$(76) \quad \left(\sum_{j=0}^n b_j z^j + O(z^{n+1}) \right)^k = \sum_{j=0}^n c_{k,j}(\mathbf{b}) z^j + O(z^{n+1}),$$

$k \in \mathbf{N}$, donde $c_{k,j}(\mathbf{b})$ se define de acuerdo a (69), y

$$(77) \quad \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_k c_{k,j}(\mathbf{b}) z^{k+j} + O(z^{n+1}) = \sum_{j=0}^n d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) z^j + O(z^{n+1}),$$

con $d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ según (70).

Ahora, desarrollando el radical que aparece en (65) en serie tenemos

$$(78) \quad \sqrt{1 + \frac{h^2 \beta^2}{4}} = \sum_{j=0}^n p_j (h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1})$$

para cada $n \in \mathbf{N}$, con

$$(79) \quad p_j = \begin{cases} 1, & j = 0; \\ 0, & j \text{ impar}; \\ \frac{(-1)^{j/2}}{2^{3j/2}} \prod_{k_1=0}^{j/2-1} \frac{2k_1-1}{k_1+1}, & j \text{ par} > 0; \end{cases}$$

de allí que

$$(80) \quad \ln \left(-\frac{h\beta}{2} + \sqrt{1 + \frac{(h\beta)^2}{4}} \right) = \ln \left(\sum_{j=0}^{n+1} p_j (h\beta)^j + O((h\beta)^{n+2}) \right),$$

redefiniendo $p_1 = -\frac{1}{2}$. Escribiendo (80) como $\ln(1 + \nu h\beta)$ su desarrollo es

$$(81) \quad \sum_{k=0}^n a_k \nu^k (h\beta)^k + O(\nu^{n+1} (h\beta)^{n+1}),$$

con

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ \frac{(-1)^{k-1}}{k}, & k > 0. \end{cases}$$

Podemos expresar ν en la forma (75) (con $b_j = p_{j+1}$); elevando esta expresión a las potencias p y $n+1$ respectivamente, aplicando (76), sustituyendo los resultados a su vez en (81), aplicando a continuación (77), y observando que $c_0 = 0$ llegamos a

$$|z_{\beta,h}| = Z_n(h\beta) \equiv \sum_{j=1}^n c_j (h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}), \quad c_j = -2d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

De esto

$$|z_{\beta,h}|^k = (h\beta)^k \left\{ \left(\sum_{j=0}^n l_j (h\beta)^j \right)^k + O((h\beta)^{n+1}) \right\}, \quad l_j \equiv c_{j+1}.$$

Aplicando (76) tenemos

$$(82) \quad |z_{\beta,h}|^k = (h\beta)^k \left(\sum_{j=0}^n c_{k,j}(\mathbf{l}) (h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}) \right), \quad \mathbf{l} \equiv \{l_m\}$$

$$(83) \quad = \sum_{j=0}^n c_{k,j}(\mathbf{l})(h\beta)^{k+j} + O((h\beta)^{n+1}).$$

Sustituyendo esta última expresión en (74), aplicando luego (77) y sustituyendo nuevamente lo indicado en (82), (83) nos queda

$$(84) \quad \begin{aligned} \phi(i|z_{\beta,h}|) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} i^k c_{k,j}(\mathbf{l})(h\beta)^{k+j} + \left\{ \frac{i^{n+1}(h\beta)^{n+1}}{n!} \right. \\ &\times \int_0^1 (1-z)^n \phi^{(n+1)} \left(i \left[\sum_{j=1}^n c_j(h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}) \right] z \right) dz \\ &\times \left. \left(\sum_{j=0}^n c_{n+1,j}(\mathbf{l})(h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}) \right) \right\} + O((h\beta)^{n+1}), \end{aligned}$$

con $U_n(h\beta)$ dado en (73); simplificando (84) obtenemos (71). $\square$

Sustituimos (71) en la Ec. (68) y multiplicamos ambos lados de la ecuación resultante por $\beta\sqrt{1+h^2\beta^2/4}$, teniendo

$$\begin{aligned} \beta\sqrt{1+\frac{h^2\beta^2}{4}} \left(\int_{[-\pi/h, \pi/h]} - \int_{\Gamma_{s,h}} \right) \frac{\phi(z)dz}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{hz}{2} + \beta^2} = \\ \pi \left(\sum_{k=0}^n d_k(\phi, \mathbf{l}) h^k \beta^k + U_n(h\beta) + O((h\beta)^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo (78) en la ecuación anterior se tiene

$$(85) \quad \begin{aligned} \beta \left(\sum_{j=0}^n p_j h^j \beta^j + O((h\beta)^{n+1}) \right) \left(\int_{[-\pi/h, \pi/h]} - \int_{\Gamma_{s,h}} \right) \frac{\phi(z)dz}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{hz}{2} + \beta^2} \\ = \pi \left(\sum_{k=0}^n d_k(\phi, \mathbf{l}) h^k \beta^k + U_n(h\beta) + O((h\beta)^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

En (85) sustituimos β por

$$(86) \quad \varepsilon B_n,$$

$\phi(\zeta)$ por $\phi_n(\zeta) = W(z-\zeta)A_n(\zeta)$, con $W(z-\zeta)$ continuación analítica de $W(p-p')$, y sustituimos también la primera integral en el lado izquierdo de (85) por $-A_n(z)\sqrt{2\pi}/\varepsilon$, al tener en cuenta (63). Nos queda

$$\begin{aligned}
 (87) \quad & \varepsilon B_n \left(\sum_{j=0}^n p_j (\varepsilon h B_n)^j + O((\varepsilon h B_n)^{n+1}) \right) \\
 & \times \left(-\frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} A_n(z) - \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta) A_n(\zeta) d\zeta}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta}{2} + (\varepsilon B_n)^2} \right) \\
 & = \pi \left(\sum_{k=0}^n d_k(\phi_n, \mathbf{l}) (\varepsilon h B_n)^k + O((\varepsilon h B_n)^{n+1}) \right),
 \end{aligned}$$

donde $\phi_n = \{i^q \phi_n^{(q)}(0)/q!\}$. Definamos el operador integral $T_{\beta,h,n} : \Omega_h \longrightarrow \Omega_h$ por la fórmula

$$[T_{\beta,h,n} A](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2},$$

Note que $T_{\beta,h,n}$ es acotado. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \|T_{\beta,h,n} \varphi\| &= \sup_{z \in \overline{B}_h} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} \right| \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{z \in \overline{B}_h} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{|\varphi(\zeta) W(z-\zeta) d\zeta|}{|\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2|} \\
 &\leq \frac{C_{s,h} \|\varphi\|}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{|d\zeta|}{|\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2|}
 \end{aligned}$$

para alguna constante adecuada $C_{s,h}$. Por lo tanto $\varepsilon \|T_{\beta,h,n}\| < 1$ para ε suficientemente pequeño. Entonces de (87) se sigue

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{2\pi} B_n \left(\sum_{j=0}^n p_j \varepsilon^j h^j B_n^j + O(\varepsilon^{n+1} h^{n+1} B_n^{n+1}) \right) (1 + \varepsilon T_{\beta,h,n}) A_n(z) \\
 & = \pi \sum_{k=0}^n d_k(\phi_n, \mathbf{l}) \varepsilon^k h^k B_n^k + O(\varepsilon^{n+1} h^{n+1} B_n^{n+1}),
 \end{aligned}$$

donde 1 es el operador identidad. Finalmente tenemos

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{2\pi} \left(\sum_{j=0}^n p_j \varepsilon^j h^j B_n^j + O(\varepsilon^{n+1} h^{n+1} B_n^{n+1}) \right) B_n A_n(z) \\
 (88) \quad & = \pi (1 + \varepsilon T_{\beta,h,n})^{-1} \left(\sum_{k=0}^n d_k(\phi_n, \mathbf{l}) \varepsilon^k h^k B_n^k + O((\varepsilon h B_n)^{n+1}) \right)
 \end{aligned}$$

Desarrollando el producto $B_n A_n(p)$ en serie de potencias de ε obtenemos

$$(89) \quad B_n A_n(p) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\sum_{l=0}^k \beta_l a_{k-l}(p) \right) + \varepsilon^{n+1} R_{0,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n, \bar{a}_n),$$

donde $\bar{\beta}_n = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$, $\bar{a}_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ y $R_{0,n}(\cdot, \cdot, \cdot)$ es un polinomio en sus argumentos.

Considerando el lado izquierdo de (88), sustituimos el producto $B_n A_n(z)$ por la expresión dada por (89) y $A_n(z)$ y B_n por los desarrollos (53) y (60). Tenemos

$$\begin{aligned} & -\sqrt{2\pi} \left(\sum_{j=0}^n p_j \varepsilon^j h^j B_n^j + O(\varepsilon^{n+1} h^{n+1} B_n^{n+1}) \right) B_n A_n(z) \\ &= -\sqrt{2\pi} \left(\sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^n p_j h^j c_{j,m}(\boldsymbol{\beta}) \varepsilon^{m+j} + \varepsilon^{n+1} F_{1,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n) + O(\varepsilon^{n+1}) \right) \\ & \quad \times \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k i_k(z) + \varepsilon^{n+1} R_{0,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n, \bar{a}_n) \right) \\ (90) \quad &= -\sqrt{2\pi} \left\{ \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k d_j(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) i_{k-j}(z) \right) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1}) \right\} \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}$, $i_k(z) = \sum_{l=0}^k \beta_l a_{k-l}(z)$ y $\mathbf{p} = \{p_j h^j\}$.

Consideremos ahora el lado derecho de (88). Calculamos

$$(W(z - \zeta))_{\zeta}^{(j)} = (-1)^j W^{(j)}(z - \zeta), \quad A_n^{(k)}(\zeta) = \sum_{l=0}^n a_l^{(k)}(\zeta) \varepsilon^l,$$

por lo cual aplicando la fórmula de Leibniz tenemos

$$\phi_n^{(k)}(\zeta) = \sum_{l=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j W^{(j)}(z - \zeta) a_l^{(k-j)}(\zeta) \varepsilon^l.$$

Luego

$$(91) \quad d_k(\phi_n, \mathbf{l}) = \sum_{j=0}^k \frac{\phi_n^{(j)}(0)}{j!} i^j c_{j,k-j}(\mathbf{l}) = \sum_{l=0}^n G_{1,k,l}(z) \varepsilon^l,$$

donde

$$G_{1,k,l}(z) = \sum_{j=0}^k \sum_{k_1=0}^j (-1)^{k_1} \frac{i^j c_{j,k-j}(\mathbf{l})}{k_1!(j-k_1)!} W^{(k_1)}(z) a_l^{(j-k_1)}(0).$$

Entonces, por sustitución de (91) en lugar de $d_k(\phi_n, \mathbf{l})$ en el primer término del argumento del operador $(1 + \varepsilon T_{\beta, h, n})^{-1}$ en el lado derecho de (88), dicho término puede expresarse como

$$(92) \quad \sum_{k=0}^n d_k(\phi_n, \mathbf{l}) \varepsilon^k h^k B_n^k = \sum_{k=0}^n G_{1,k}(z) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1})$$

donde

$$G_{1,k}(z) = \sum_{m=0}^k h^m G_{2,m,k-m}(z), \quad G_{2,k,l}(z) = \sum_{m=0}^l G_{1,k,m}(z) c_{k,l-m}(\beta).$$

Escribamos el lado derecho de (88), mediante la sustitución (92) en lugar del primer término del argumento de $(1 + \varepsilon T_{\beta, h, n})^{-1}$, sustituyendo a su vez esta expresión de dicho operador por su serie de Neumann, y desarrollemos el producto resultante:

$$(93) \quad \pi \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l \varepsilon^l T_{\beta, h, n}^l + \varepsilon^{n+1} T_{\text{rsen}, n} \right) \left(\sum_{k_1=0}^n G_{1,k_1}(z) \varepsilon^{k_1} + O(\varepsilon^{n+1}) \right) \\ = \pi \left\{ \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^k (-1)^l \varepsilon^l T_{\beta, h, n}^l G_{1,k-l}(z) \right) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1}) \right\},$$

donde $T_{\beta, h, n}^0 = 1$ y $T_{\text{rsen}, n} = (-1)^{n+1} T_{\beta, h, n}^{n+1} (1 + \varepsilon T_{\beta, h, n})^{-1}$. Sustituyendo (90) y (93) en los lados izquierdo y derecho de (88) respectivamente, obtenemos la igualdad

$$(94) \quad \sqrt{2\pi} \left\{ \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k d_j(\mathbf{p}, \beta) i_{k-j}(z) \right) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1}) \right\} \\ = \pi \left\{ \sum_{k=0}^n G_k(z) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1}) \right\}$$

donde $G_k(z) = \sum_{l=0}^k (-1)^{l+1} T_{\beta, h, n}^l G_{1,k-l}(z)$. Notemos que

$$(95) \quad G_k(z) = -(G_{1,k}(z) + T_{\beta, h, n} G_{k-1}(z)).$$

Después, calculando los coeficientes de ε^0 , ε , ε^2 , etc., observando también cómo figuran $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$, a_{n-2} , a_{n-1} , a_n en los coeficientes de

ε^n en ambos lados de (94) y teniendo en mente (95) en el lado derecho de (94), obtenemos una igualdad entre dos series de potencias de ε equivalente a la ecuación (85):

$$\begin{aligned}
 (96) \quad & \sqrt{2\pi} \left\{ \beta_0 a_0(z) + \varepsilon (\beta_0 a_1(z) + \beta_1 a_0(z)) \right. \\
 & + \varepsilon^2 \left(\beta_0 a_2(z) + \beta_1 a_1(z) + \frac{\beta_0^3 a_0(z)}{8} + \beta_2 a_0(z) \right) \\
 & + \sum_{k=3}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} d_j(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \beta_l a_{k-j-l}(z) \right) \varepsilon^k \\
 & \left. + \varepsilon^n \left(\sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^{n-j} d_j(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \beta_l a_{n-j-l}(z) \right) \right\} + O(\varepsilon^{n+1}) \\
 & = -\pi a_0(0)W(z) \\
 & + \varepsilon \pi \left\{ \beta_0 [ia_0(0)W'(z) - ia'_0(0)W(z)] \right. \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)W(\zeta)}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} a_0(0) d\zeta - a_1(0)W(z) \left. \right\} \\
 & + \varepsilon^2 \pi \left\{ \beta_0 [ia_1(0)W'(z) - ia'_1(0)W(z)] \right. \\
 & + \beta_1 [ia_0(0)W'(z) - ia'_0(0)W(z)] \\
 & + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_0(0)W''(z) - a'_0(0)W'(z) + \frac{1}{2} a''_0(0)W(z) \right] \\
 & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} \times \dots \\
 & \dots \times \left(\beta_0 [ia_0(0)W'(\zeta) - ia'_0(0)W(\zeta)] - a_1(0)W(\zeta) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(\zeta-\zeta_1)W(\zeta_1)}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta_1}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} a_0(0) d\zeta_1 \right) d\zeta \\
 & \left. - a_2(0)W(z) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=3}^{n-1} \varepsilon^k \pi \left\{ P_k \left(\bar{\beta}_{0,k-1}, \bar{a}_{0,k-1}^{(\bar{i})}(0), W(z), W'(z), \dots, W^{(k)}(z) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(p-\zeta)G_{k-1}(\zeta)}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} d\zeta \right\} \\
& + \varepsilon^n \pi \left\{ \beta_0 \left[ia_{n-1}(0) \tilde{V}'(z) - ia'_{n-1}(0) W(z) \right] \right. \\
& \quad + \beta_1 \left[ia_{n-2}(0) W'(z) - ia'_{n-2}(0) W(z) \right] \\
& \quad + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_{n-2}(0) W''(z) - a'_{n-2}(0) W'(z) + \frac{1}{2} a''_{n-2}(0) W(z) \right] \\
& \quad + R_n \left(\bar{\beta}_{3,n-2}, \bar{a}_{2,n-3}^{(\bar{i})}(0), W(z), \dots, W^{(n)}(z) \right) \\
& \quad + \beta_{n-1} \left[ia_0(0) W'(z) - ia'_0(0) W(z) \right] \\
& \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(p-\zeta)G_{n-1}(\zeta)}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} d\zeta - a_n(0) W(z) \right\} \\
& + O(\varepsilon^{n+1})
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
(97) \quad & \bar{\beta}_{p_1,r} = (\beta_{p_1}, \dots, \beta_r), \quad p_1 < r; \\
& \bar{a}_{p_1,r}(\zeta) = (a_{p_1}(\zeta), \dots, a_r(\zeta)), \quad p_1 < r; \\
& \bar{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_n), \quad \bar{a}(\zeta) = (a_0(\zeta), \dots, a_n(\zeta)), \\
& \bar{a}_{p_1,r}^{(\bar{i})}(\zeta) = (a_{p_1}^{(i_1)}, \dots, a_r^{(i_{r-p_1+1})}), \quad \bar{a}^{(\bar{i})}(\zeta) = (a_0^{(i_1)}, \dots, a_n^{(i_n)}), \\
& \bar{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n), \quad i_k \leq n+1;
\end{aligned}$$

S_k, P_k para $k = 3, \dots, n-1, T_n, R_n, S_{n+1}, P_{n+1}, Q_{n+1}$ son polinomios de sus argumentos que contienen solamente los términos proporcionales a potencias de $W(z)$ (o a potencias de $W(z - iZ_n(\varepsilon h B_n)\zeta)$ para Q_{n+1}) y sus derivadas.

Ya que $\sin(1/2) \leq |\sin(z/2)|$ cuando $1 \leq |z| \leq \pi$ y a consecuencia de (67) se tiene que $|\varepsilon B_n / [(2/h) \sin(h\zeta/2)]| < 1$ para $\zeta \in \Gamma_{s,h}$ si $h < 1$. Por lo tanto reconocemos en los integrandos de (97) una serie geométrica convergente:

$$\frac{1}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} = \frac{1}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\frac{4^m}{h^{2m}} \sin^{2m} \frac{h\zeta}{2}} \varepsilon^{2m} B_n^{2m}.$$

Hacemos justamente esta sustitución en (97) y desarrollamos $W(z)$ en serie. Igualando los coeficientes de ε^k , $k = 0, \dots, n$ en ambos lados de la ecuación resultante obtenemos el sistema de ecuaciones para β_k , a_k , $k = 0, 1, \dots, n$:

$$(98) \quad \beta_0 a_0(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0(0) W(z),$$

$$(99) \quad \beta_0 a_1(z) + \beta_1 a_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[i a_0(0) W'(z) - i a_0'(0) W(z) - \frac{h^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta \right] - a_1(0) W(z) \right\},$$

$$(100) \quad \begin{aligned} & \beta_0 a_2(z) + \beta_1 a_1(z) + \beta_2 a_0(z) + \frac{1}{8} \beta_0^3 a_0(z) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[i a_1(0) W'(z) - i a_1'(0) W(z) - \frac{h^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_1(\zeta) d\zeta \right] \right. \\ & \quad \left. + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_0(0) W''(z) - a_0'(0) W'(z) + \frac{1}{2} a_0''(0) W(z) \right] \right. \\ & \quad \left. + \beta_1 \left[i a_0(0) W'(z) - i a_0'(0) W(z) - \frac{h^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta \right] \right. \\ & \quad \left. - a_2(0) W(z) \right\}, \end{aligned}$$

$$(101) \quad \begin{aligned} & \beta_0 a_3(z) + \beta_1 a_2(z) + \frac{1}{8} \beta_0^3 a_1(z) + \beta_2 a_1(z) + \frac{3}{8} \beta_0^2 \beta_1 a_0(z) + \beta_3 a_0(z) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[i a_2(0) W'(z) - i a_2'(0) W(z) - \frac{h^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_2(\zeta) d\zeta \right] \right. \\ & \quad \left. + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_1(0) W''(z) - a_1'(0) W'(z) + \frac{1}{2} a_1''(0) W(z) \right] \right. \\ & \quad \left. + \beta_0^3 \left[\frac{1}{24} i a_0'(0) W(z) - \frac{1}{24} i a_0(0) W'(z) + \frac{1}{6} i a_0'''(0) W(z) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} i a_0''(0) W'(z) + \frac{1}{2} i a_0'(0) W''(z) - \frac{1}{6} i a_0(0) W'''(z) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h^4}{16\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^4 \frac{h\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta - \frac{h^2}{32\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta \Big] \\
 & + \beta_1 \left[ia_1(0)W'(z) - ia'_1(0)W(z) - \frac{h^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_1(\zeta) d\zeta \right] \\
 & + \beta_0\beta_1 \left[a_0(0)W''(z) - 2a'_0(0)W'(z) + a''_0(0)W(z) \right] \\
 & + \beta_2 \left[ia_0(0)W'(z) - ia'_0(0)W(z) - \frac{h^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad - a_3(0)W(z) \Big\} \\
 & \qquad \qquad \qquad \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (102) \quad & \beta_0 a_k(z) + \beta_1 a_{k-1}(z) + \dots \\
 & \dots + \beta_k a_0(z) + \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{k-j} d_j(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \beta_l a_{k-j-l}(z) \\
 & = \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta) S_k \left(\bar{\beta}_{0,k-1}, \bar{a}_{0,k-1}(\zeta), \operatorname{sen} \frac{h\zeta}{2} \right) d\zeta}{\operatorname{sen}^{l_k} \frac{h\zeta}{2}} \\
 & \quad + P_k \left(\bar{\beta}_{0,k-1}, \bar{a}_{0,k-1}^{(\bar{i})}(0), W(z), W'(z), \dots, W^{(k)}(z) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (103) \quad & \beta_0 a_n(z) + \beta_1 a_{n-1}(z) + \beta_2 a_{n-2}(z) + \dots \\
 & \dots + \beta_{n-1} a_1(z) + \beta_n a_0(z) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{n-j} d_j(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \beta_l a_{n-j-l}(z) \\
 & = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[ia_{n-1}(0)W'(z) - ia'_{n-1}(0)W(z) \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \frac{h^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_{n-1}(\zeta) d\zeta \right] \right. \\
 & \quad \left. + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_{n-2}(0)W''(z) - a'_{n-2}(0)W'(z) + \frac{1}{2} a''_{n-2}(0)W(z) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \beta_1 \left[ia_{n-2}(0)W'(z) - ia'_{n-2}(0)W(z) - \frac{h^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_{n-2}(\zeta) d\zeta \right] \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta) T_n \left(\bar{\beta}_{3,n-2}, \bar{a}_{2,n-3}(\zeta) \right) d\zeta}{\operatorname{sen}^{l_n} \frac{h\zeta}{2}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + R_n \left(\bar{\beta}_{3,n-2}, \bar{a}_{2,n-3}^{(\bar{i})}(0), W(z), \dots, W^{(n)}(z) \right) \\
 & + \beta_{n-1} \left[ia_0(0)W'(z) - ia_0'(0)W(z) - \frac{h^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)}{\text{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad - a_n(0)W(z) \Big\}
 \end{aligned}$$

Lema 5.1.19. *El sistema (98)–(103) tiene solución única bajo las condiciones $a_0(0) = 1$, $a_1(0) = 0$, $\dots$, (62) y sus soluciones $a_k(z) \in \Omega_h$, $k = 0, 1, \dots$.*

Demostración: Poniendo $p = 0$ en (98) y teniendo en cuenta que por (51) (notemos que para $p \in [-\pi/h, \pi/h]$, $W(p) = [V_h(x)]^\sim(p)$)

$$(104) \quad W(0) = \sum_{j=-[R/h]}^{[R/h]} V_j \int_{\mathbf{R}} \text{senc} \pi(x/h - j) dx = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_j V_j < 0,$$

obtenemos

$$(105) \quad \beta_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} W(0).$$

Por la condición $a_0(0) = 1$ obtenemos de (99)

$$(106) \quad a_0(z) = \frac{W(z)}{W(0)}.$$

Fijemos $z = 0$ en (99). Por (106) y la condición $a_1(0) = 0$ obtenemos

$$(107) \quad \beta_1 = \frac{h^2}{8} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(\zeta)W(-\zeta)}{\text{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta.$$

Ahora encontremos $a_1(z)$ de (99). Sustituyendo (105), (106) y (107) en (99), y tomando en cuenta el hecho de que $a_0(0) = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 (108) \quad a_1(z) = & \frac{i}{W(0)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [W'(z)W(0) - W'(0)W(z)] \\
 & - \frac{h^2}{4\sqrt{2\pi}W(0)} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(\zeta)W(z-\zeta)}{\text{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta \\
 & + \frac{h^2 W(z)}{4\sqrt{2\pi}(W(0))^2} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(\zeta)W(-\zeta)}{\text{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta.
 \end{aligned}$$

Observamos que de hecho $a_1(0) = 0$. Procediendo análogamente, obtenemos β_n y a_n suponiendo que conocemos $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, y que $a_k(0) = 0$, $k = 2, \dots, n-1$. Buscamos $a_n(z)$ tal que $a_n(0) = 0$. Poniendo $z = 0$ en (103) y tomando en cuenta el hecho de que $a_0(0) = 1$, obtenemos

$$(109) \quad \beta_n = \beta_0 \left[-i\sqrt{\frac{\pi}{2}} a'_{n-1}(0)W(0) - \frac{h^2}{4\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(-\zeta)a_{n-1}(\zeta)}{\sin^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta \right] \\ + \dots + \beta_{n-1} \left[i\sqrt{\frac{\pi}{2}} W'(0) - i\sqrt{\frac{\pi}{2}} a'_0(0)W(0) - \frac{h^2}{4\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(-\zeta)a_0(\zeta)}{\sin^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta \right];$$

esto es, β_n está determinado de manera única. Sustituyendo (109) y $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ en (103) vemos que $a_n(p)$ se determina en forma única puesto que $\beta_0 \neq 0$. Y así no es difícil ver que de hecho $a_n(0) = 0$. $\square$

Del Lema 5.1.19 y de (98)-(103) se sigue que B_n y A_n , expresados en términos de los valores $\beta_0, \dots, \beta_n$ y las funciones $a_0, \dots, a_n$ mediante (53), (60), resuelven la ecuación (63) hasta un orden mayor que $O(\varepsilon^{n+1})$ en la norma de $L_2(\mathbf{R})$. Para demostrar esto, consideremos el coeficiente de ε^{n+1} en (97). Tenemos que $P_{n+1} \in \Omega_h$, ya que $W(z), a_k(z) \in \Omega_h$, $k = 0, 1, \dots, n$. El primer sumando en el coeficiente en ε^{n+1} pertenece a Ω_h por la finitud del contorno $\Gamma_{s,h}$ y la misma propiedad para $W(z)$ y $a_k(z)$. Finalmente, el tercer sumando en el mismo coeficiente pertenece a Ω_h de igual manera. Esto significa que

$$(110) \quad \hat{H}_{h,\varepsilon} \psi_n = E_n \psi_n + O(\varepsilon^{n+1})$$

en $L_2(\mathbf{R})$.

A continuación multiplicaremos la solución aproximada ψ_n por cierta constante $c(\varepsilon)$ para que la norma de la función propia así obtenida (es decir, normalizada) Ψ_n satisfaga la condición de normalización

$$(111) \quad \|\Psi_n\| = 1 + O(\varepsilon^{n+1}).$$

De (59) y la identidad de Parseval se sigue que

$$(112) \quad \|\psi_n(x)\| = \left(\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{|A_n(p)|^2 dp}{\left| \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{hp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2 \right|^2} \right)^{1/2}.$$

Notemos que $\beta_0 > 0$ por (54) y (104). Así, para ε suficientemente pequeño tenemos $|B_n| = B_n$. De (60) se sigue que la expresión $(B_n)^{-3/2}$ es analítica en ε para ε pequeño. También necesitamos la asintótica de la integral en (112). Para obtener el primer término de esta expansión, usamos el siguiente método. Hacemos la partición de la unidad formada por las tres funciones $\chi_{1,2,3}(p) \in C^\infty$ tales que $\chi_2(p) = \chi_3(-p)$, $\sum_j \chi_j(p) = 1$, y

$$\chi_1(p) = \begin{cases} 0, & p \in [-\pi/h, -\pi/2h] \cup [\pi/2h, \pi/h]; \\ 1, & p \in [-1/h, 1/h], \end{cases}$$

$$\chi_3(p) = \begin{cases} 0, & p \in [-\pi/h, 1/h]; \\ 1, & p \in [\pi/2h, \pi/h]. \end{cases}$$

Luego

$$(113) \quad \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{A_n^2(p)dp}{\left(\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{hp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2\right)^2} = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_{j=1}^3 \chi_j(p) \frac{A_n^2(p)dp}{\left(\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{hp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2\right)^2}$$

$$(114) \quad = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \chi_1(p) \frac{A_n^2(p)dp}{\left(\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{hp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2\right)^2}$$

$$(114) \quad + \int_{-\pi/h}^{\pi/h} (\chi_2 + \chi_3)(p) \frac{A_n^2(p)dp}{\left(\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{hp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2\right)^2}$$

Haciendo el cambio de variable $q = \frac{2}{h}\sin\frac{hp}{2}$ en la integral (113) la podemos escribir

$$(115) \quad \int_{-2/h}^{2/h} \frac{\chi_1\left(\frac{2}{h}\arcsen\frac{hq}{2}\right) A_n^2\left(\frac{2}{h}\arcsen\frac{hq}{2}\right) dq}{(q^2 + \varepsilon^2 B_n^2)^2 \sqrt{1 - \frac{h^2 q^2}{4}}}$$

$$= \int_{-\sqrt{2}/h}^{\sqrt{2}/h} \frac{\kappa_1(q)(1 + O(q) + O(q)O(\varepsilon))(1 + O(q^2))dq}{(q^2 + \varepsilon^2 B_n^2)^2}$$

ya que sucesivamente (tomando en cuenta las condiciones de normalización (62) $A_n(p) = a_0(p) + O(p)O(\varepsilon)$, $a_0(p) = 1 + O(p)$, $A_n^2(p) =$

$1 + O(p) + O(p)O(\varepsilon)$, $\frac{2}{h} \arcsen \frac{hq}{2} = O(q)$ y por ende $A_n^2 \left(\frac{2}{h} \arcsen \frac{hq}{2} \right) = 1 + O(q) + O(q)O(\varepsilon)$, y donde $\kappa_1(q) \in C^\infty$ y

$$\begin{aligned} \kappa_1(q) &= \chi_1 \left(\frac{2}{h} \arcsen \frac{hq}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & q \in [-2/h, -\sqrt{2}/h] \cup [\sqrt{2}/h, 2/h]; \\ 1, & q \in [-\frac{2}{h} \sen \frac{1}{2}, \frac{2}{h} \sen \frac{1}{2}], \end{cases} \end{aligned}$$

Luego la integral (115) se puede sucesivamente escribir

$$(116) \quad \int_{-\sqrt{2}/h}^{\sqrt{2}/h} \frac{A_{1,n}(q) dq}{(q^2 + \varepsilon^2 B_n^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + O(q) + O(q)O(\varepsilon)) dq}{(q^2 + \varepsilon^2 B_n^2)^2}$$

donde

$$A_{1,n}(q) = \frac{\kappa_1(q) A_n^2 \left(\frac{2}{h} \arcsen \frac{hq}{2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{h^2 q^2}{4}}}$$

está en C_0^∞ y su serie asintótica es $1 + O(q) + O(q)O(\varepsilon)$. Haciendo otro cambio de variable, $q = \varepsilon B_n t$, en (116), dicha integral la podemos expresar como

$$(117) \quad \frac{1}{\varepsilon^3 B_n^3} \int_{\mathbf{R}} \frac{(1 + O(\varepsilon) P_1(\bar{\beta}, \varepsilon, t)) dt}{(t^2 + 1)^2} = \varepsilon^{-3} B_n^{-3} \left(\frac{\pi}{2} + O(\varepsilon) \right),$$

tomando en cuenta (62) y el hecho que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \pi/2.$$

Por otra parte, la integral (114) podemos escribirla como

$$\begin{aligned} & \frac{h^4}{16} \int_{1/h \leq |p| \leq \pi/h} \frac{(\chi_2 + \chi_3)(p) A_n^2(p) dp}{\sen^4 \frac{hp}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 B_n^2}{\frac{4}{h^2} \sen^2 \frac{hp}{2}} \right)^2} \\ &= \text{Const}^2 h^4 \int_{1/h \leq |p| \leq \pi/h} \frac{(\chi_2 + \chi_3)(p) (1 + O(\varepsilon)) (1 + O(\varepsilon^2 B_n^2)) dp}{\sen^4 \frac{hp}{2}} \\ (118) \quad &= \text{Const}^2 h^4 \int_{1/h}^{\pi/h} \frac{\chi_3(p) dp}{\sen^4 \frac{hp}{2}} + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

ya que $\csc^2 \frac{hp}{2} = \csc^2 \frac{\pi}{4} (1 + O(p))$ y $\chi_2(p) = \chi_3(-p)$. Sustituyendo (117) y (118) en (113) y (114) respectivamente tenemos que

$$(119) \quad \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{A_n^2(p) dp}{\left(\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{hp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2\right)^2} \\ = \varepsilon^{-3} B_n^{-3} \left(\frac{\pi}{2} + O(\varepsilon)\right) + \text{Const}^2 h^4 \int_{1/h}^{\pi/h} \frac{\chi_3(p) dp}{\sin^4 \frac{hp}{2}} + O(\varepsilon)$$

por lo que la norma

$$(120) \quad \|\psi_n(x)\| = \varepsilon^{-3/2} B_n^{-3/2} \left(\frac{\pi}{2} + O(\varepsilon)\right)^{1/2} = \varepsilon^{-3/2} B_n^{-3/2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + O(\varepsilon)\right) \\ = \beta_0^{-3/2} \varepsilon^{-3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + O(\varepsilon))$$

Aplicando argumentos similares a aquellos del Lema 5.1.18 y tomando en cuenta la analiticidad de $B_n^{-3/2}$ podemos escribir la expansión asintótica de la norma (112):

$$(121) \quad \|\psi_n(x)\| \\ = \varepsilon^{-3/2} [l_0(\bar{\beta}, \bar{a}(p)) + \dots + \varepsilon^n l_n(\bar{\beta}, \bar{a}(p)) + O(\varepsilon^{n+1})]$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Luego, de acuerdo a (120) el término principal $l_0(\bar{\beta}, \bar{a}(p))$ es

$$(122) \quad \sqrt{\frac{\pi}{2\beta_0^3}}.$$

Vamos a normalizar la función propia ψ_n seleccionando la constante apropiada $c(\varepsilon)$. De (121) se sigue que esta constante tiene la forma

$$(123) \quad c(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2} (d_0 + d_1 \varepsilon + \dots + d_n \varepsilon^n) + O(\varepsilon^{n+5/2}).$$

Multiplicando la expresión (121) por la que es para $\|\psi_n\|$, obtenemos

$$(124) \quad c(\varepsilon) \|\psi_n\| = d_0 l_0 + (d_0 l_1 + d_1 l_0) \varepsilon + \dots \\ + (d_0 l_n + \dots + d_n l_0) \varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Ahora es claro que podemos hacer este producto igual a $1 + O(\varepsilon^{n+1})$. De hecho, para este fin, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones con incógnitas d_i , $i = 0, \dots, n$:

$$(125) \quad d_0 l_0 = 1, \quad d_0 l_k + \dots + d_k l_0 = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Esto es posible ya que $l_0 \neq 0$ por (122). Además,

$$(126) \quad d_0 = \sqrt{\frac{2\beta_0^3}{\pi}}.$$

Así hemos encontrado la constante $c(\varepsilon)$ tal que la función propia aproximada

$$(127) \quad \Psi_n(x) \equiv c(\varepsilon)\psi_n(x)$$

satisface la condición (111). Es evidente que esta función propia normalizada Ψ_n satisface (110) con un nuevo término residual $O(\varepsilon^{n+1}\varepsilon^{3/2})$, *i.e.*,

$$(128) \quad \widehat{H}_{h,\varepsilon}\Psi_n = E_n\Psi_n + O(\varepsilon^{n+5/2}), \quad n = 0, \dots$$

Esta normalización fue necesaria para la aplicación del siguiente

Lema 5.1.20 (Lema 1.3 de [11]). *Sea T un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Sea μ algún punto sobre la recta real, r la distancia de μ al espectro del operador T . Entonces para cada $g \in \mathcal{D}(T)$ es válida la siguiente desigualdad:*

$$(129) \quad r\|g\| \leq \|(T - \mu)g\|.$$

Este lema nos provee de un fundamento riguroso para esta construcción. Para aplicarlo consideramos el operador discreto de Schrödinger $\widehat{H}_{h,\varepsilon}$ (dado por (25)) como el operador T del lema. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en este caso es $L_2(\mathbf{R})$. Vamos a sustituir la distancia del valor propio aproximado E_n al espectro en vez de r en la desigualdad (129) y la función propia aproximada Ψ_n en lugar de g . Así obtenemos de la estimación (129) la estimación (57). En una forma parecida aplicamos el Lema 1.4 de [11] para obtener la estimación (58).

6. La Solución Exacta

Resulta que la solución asintótica de la Ec. (26), $E = -\beta^2$, $\beta \rightarrow 0^+$, construida en la sección precedente, es en realidad una solución exacta. Para verlo, consideremos la solución $\widetilde{\Psi}_h(p)$ (no distinguimos entre ésta y su continuación periódica) de dicho problema en la forma

$$(130) \quad \widetilde{\Psi}_h(p) = \frac{A_h(p)}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{hp}{2} + \beta^2},$$

donde suponemos que $A_h(z) \in \Omega_h$ (probaremos que éste es en efecto el caso). Sustituyendo en (26) la función $\widetilde{\Psi}_h$ dada por (130) obtenemos la ecuación equivalente

$$(131) \quad A_h(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{W(p-p')A_h(p')dp'}{\frac{4}{h^2}\sin^2 \frac{hp'}{2} + \beta^2}.$$

Así (131) toma la forma

$$(132) \quad \beta \sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}} \left(-A_h(p) \sqrt{2\pi}/\varepsilon - \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(p-\zeta)A_h(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{h^2}\sin^2 \frac{h\zeta}{2} + \beta^2} \right) \\ = \pi W(p - i|z_{\beta,h}|)A_h(i|z_{\beta,h}|).$$

Definición 6.1.21. Definimos el operador integral $T_{\beta,h} : \Omega_h \longrightarrow \Omega_h$ por la fórmula

$$(133) \quad [T_{\beta,h}\varphi(\zeta)](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,h}} \frac{W(z-\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{h^2}\sin^2 \frac{h\zeta}{2} + \beta^2}, \quad z \in \Omega_h.$$

Nota 6.1.22. $[T_{\beta,h}\varphi(\zeta)](z) \in \Omega_h$ porque el integrando es analítico. Por lo tanto $T_{\beta,h}$ está bien definida. $[T_{\beta,h}\varphi(\zeta)](z)$ es analítica en β también ya que $|\beta/[(2/h)\sin(h\zeta/2)]| < 1$ para $\zeta \in \Gamma_{s,h}$ y

$$\frac{1}{\frac{4}{h^2}\sin^2 \frac{h\zeta}{2} + \beta^2} = \frac{1}{\frac{4}{h^2}\sin^2 \frac{h\zeta}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\frac{4^m}{h^{2m}}\sin^{2m} \frac{h\zeta}{2}} \beta^{2m}.$$

Además, $T_{\beta,h}$ es acotado, digamos, en la norma del supremo, y como $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \|T_{\beta,h,n}\| < 1$ para ε suficientemente pequeño.

Ahora, de (132) se sigue que

$$-\sqrt{2\pi}\beta \sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}} \left[(1 + \varepsilon T_{\beta,h})A_h(\zeta) \right](z) \\ = \pi \varepsilon W(z - i|z_{\beta,h}|)A_h(i|z_{\beta,h}|),$$

donde 1 es el operador identidad. Supongamos que $A_h(i|z_{\beta,h}|) = 1$ (probaremos que siempre puede suponerse esto). Tenemos que

$$(134) \quad A_h(z) = \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\beta \sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}}} \left[(1 + \varepsilon T_{\beta,h,\zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - i|z_{\beta,h}|) \right](z).$$

Ya que $\varepsilon T_{\beta,h}$ es un operador de contracción, $(1 + \varepsilon T_{\beta,h})^{-1}$ es igual a su serie de Neumann y (134) se expresa como

$$A_h(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\beta \sqrt{1 + \frac{h^2 \beta^2}{4}}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \varepsilon^l \left[T_{\beta,h,\zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - i|z_{\beta,h}|) \right] (z),$$

donde $T_{\beta,h}^0 \equiv 1$. Así, por la Nota 6.1.22, tenemos una serie uniformemente convergente de funciones analíticas en z sobre $B_{\pi/h}$. Por lo tanto $A_h(z)$ es analítica en $z \in B_{\pi/h}$.

Nota 6.1.23. Aplicando l veces el operador $T_{\beta,h}$ a una función $\varphi \in \Omega_h$, $l = 1, 2, \dots$, tenemos

$$(135) \quad [T_{\beta,h}^l \varphi(\zeta)](z) \\ = (2\pi)^{-l/2} \int_{\Gamma_{s,h}} \cdots \int_{\Gamma_{s,h}} \varphi(\zeta) \prod_{n=1}^l \frac{W(\zeta_{n-1} - \zeta_n)}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta_n}{2} + \beta^2} d\zeta_n,$$

donde $\zeta_0 \equiv z$, $\zeta_l \equiv \zeta$.

Evaluyendo en $z = i|z_{\beta,h}|$, de (134) obtenemos la ecuación secular para β :

$$(136) \quad \beta \sqrt{1 + \frac{h^2 \beta^2}{4}} \\ = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 + \varepsilon T_{\beta,h,\zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - i|z_{\beta,h}|) \right] (i|z_{\beta,h}|).$$

Consideremos la función

$$(137) \quad F_h(\beta, \varepsilon) = \beta \sqrt{1 + \frac{h^2 \beta^2}{4}} \\ + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 + \varepsilon T_{\beta,h,\zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - i|z_{\beta,h}|) \right] (i|z_{\beta,h}|).$$

Sustituyendo nuevamente $(1 + \varepsilon T_{\beta,h})^{-1}$ por su serie de Neumann en (137), ésta se convierte en

$$(138) \quad F_h(\beta, \varepsilon) = \beta \sqrt{1 + \frac{h^2 \beta^2}{4}} \\ + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \varepsilon^l \left[T_{\beta,h,\zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - i|z_{\beta,h}|) \right] (i|z_{\beta,h}|).$$

Nota 6.1.24. Observemos que $[T_{\beta,h,\zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - i|z_{\beta,h}|)](i|z_{\beta,h}|)$ es analítica en β . En efecto, en la Ec. (135) podemos sustituir $i|z_{\beta,h}|$ en lugar de z y $W(\zeta - i|z_{\beta,h}|)$ en lugar de $\varphi(\zeta)$, teniendo en cuenta las expansiones

$$\begin{aligned} W(i|z_{\beta,h}| - \zeta_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} i^k W^{(k)}(-\zeta_1) |z_{\beta,h}|^k / k!, \\ W(\zeta - i|z_{\beta,h}|) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k i^k W^{(k)}(\zeta) |z_{\beta,h}|^k / k!, \\ \prod_{n=1}^l \frac{1}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta_n}{2} + \beta^2} &= \prod_{n=1}^l \left(\frac{1}{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\zeta_n}{2}} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k_n}}{\frac{4^{k_n}}{h^{2k_n}} \sin^{2k_n} \frac{h\zeta_n}{2}} \beta^{2k_n} \right), \\ |z_{\beta,h}|^k &= \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j}(\mathbf{l}) h^{k+j} \beta^{k+j}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes $c_{k,j}(\mathbf{l})$ se definen de acuerdo a (69) y (72).

Así tenemos que la función $F_h(\beta, \varepsilon)$ es analítica en cada argumento, y por el teorema de Hartogs ([9], Secc. 2.2), es analítica en $\mathbf{C}^2$. Además, $F_h(0,0) = 0$, $[\partial_\beta F_h](0,0) = 1$, lo último por el factor ε en el segundo término de (138). De aquí que, por el teorema de la función implícita ([8], Teor. I,B4), la solución $\beta_h(\varepsilon)$ para β de la ecuación secular (136), la cual tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe, es única y está dada por (7).

De igual manera, tomemos ahora $E = 4/h^2 + \gamma^2$, $\gamma \rightarrow 0^+$ en la Ec. (26); entonces tenemos

$$(139) \quad \left(\frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{hp}{2} + \gamma^2 \right) \widetilde{\Psi}_h(p) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} W(p-p') \widetilde{\Psi}_h(p') dp'$$

en $p \in [-\pi/h, \pi/h]$. Similarmente a lo anterior, buscamos la solución en la forma

$$(140) \quad \widetilde{\Psi}_h(p) = \frac{D_h(p)}{\frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{hp}{2} + \gamma^2},$$

donde $D_h(z)$ es una función analítica en $B_{\pi/h}$ y $2\pi/h$ -periódica. Sustituyendo en (139) la función $\widetilde{\Psi}_h$ dada por (140) obtenemos la ecuación equivalente

$$(141) \quad D_h(p) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{W(p-p') D_h(p') dp'}{\frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{hp'}{2} + \gamma^2}.$$

Nota 6.1.25. Note que el integrando en el lado derecho de Ec. (141) es singular en $p' = -\pi/h$ y $p' = \pi/h$ cuando $\gamma = 0$. Para reducir nuestra ecuación a una situación similar a la de la Sección 6, observemos que ya que se supuso que D_h es $2\pi/h$ -periódica, tenemos

$$\left(\int_{-\pi/h}^0 = \int_{\pi/h}^{2\pi/h} \right) \frac{W(p-p')D_h(p')dp'}{\frac{4}{h^2}\cos^2\frac{hp'}{2} + \gamma^2}.$$

Así podemos calcular la integral en la Ec. (141) de 0 a $2\pi/h$ con el mismo integrando, la cual, dentro del nuevo intervalo de integración, es solamente singular en $p' = \pi/h$ cuando $\gamma = 0$ (similarmente al caso discreto con $\sum_j V_j$ no positiva).

Nota 6.1.26. La única singularidad con parte imaginaria positiva de $\widetilde{\psi}_\gamma(z)$ en $0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi/h$ cuando $\gamma \rightarrow 0^+$ es

$$z_{\gamma,h} \equiv \pi/h - \frac{2i}{h} \ln \left(-\frac{h\gamma}{2} + \sqrt{1 + \frac{h^2\gamma^2}{4}} \right).$$

En forma análoga a la de la Sección 6, suponemos que $D_h(z) \in \Omega_h$ e introducimos el contorno formado por la traslación de $\Gamma_{s,h}$ a la derecha por π/h :

$$(142) \quad \Gamma_{c,h} := [0, \pi/h - 1] \cup \{p + iq : (p - \pi/h)^2 + q^2 = 1, q > 0\} \cup [\pi/h + 1, 2\pi/h].$$

Si $\gamma < \frac{2}{h}\sinh\frac{h}{2}$, por el teorema del residuo de Cauchy tenemos

$$\begin{aligned} \gamma \sqrt{1 + \frac{h^2\gamma^2}{4}} \left(\int_{[0, 2\pi/h]} - \int_{\Gamma_{c,h}} \right) \frac{W(p-\zeta)D_h(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{h^2}\cos^2\frac{h\zeta}{2} + \gamma^2} \\ = \pi W(p - z_{\gamma,h})D_h(z_{\gamma,h}), \end{aligned}$$

y (141) se convierte en

$$(143) \quad \gamma \sqrt{1 + \frac{h^2\gamma^2}{4}} \left(D_h(p)\sqrt{2\pi}/h\varepsilon - \int_{\Gamma_{c,h}} \frac{W(p-\zeta)D_h(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{h^2}\cos^2\frac{h\zeta}{2} + \gamma^2} \right) \\ = \pi W(p - z_{\gamma,h})D_h(z_{\gamma,h}).$$

Definimos el operador integral $T_{\gamma,h} : \Omega_h \rightarrow \Omega_h$ por la fórmula

$$[T_{\gamma,h}\varphi(\zeta)](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{c,h}} \frac{W(z-\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{h^2}\cos^2\frac{h\zeta}{2} + \gamma^2}.$$

Tenemos que $[T_{\gamma,h}\varphi(\zeta)](z) \in \Omega_h$ y es analítica en γ . Además, $T_{\gamma,h}$ es acotado. Por lo tanto $\varepsilon \|T_{\gamma,h}\| < 1$ para ε suficientemente pequeño. Ahora, de (143) se sigue que

$$\sqrt{2\pi} \gamma \sqrt{1 + \frac{h^2 \gamma^2}{4}} [(1 - \varepsilon T_{\gamma,h}) D_h(\zeta)](z) = \pi \varepsilon W(z - z_{\gamma,h}) D_h(z_{\gamma,h}).$$

Suponiendo $D_h(z_{\gamma,h}) = 1$, tenemos

$$(144) \quad D_h(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\gamma \sqrt{1 + \frac{h^2 \gamma^2}{4}}} \left[(1 - \varepsilon T_{\gamma,h,\zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - z_{\gamma,h}) \right](z),$$

la cual se convierte en

$$D_h(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\gamma \sqrt{1 + \frac{h^2 \gamma^2}{4}}} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \left[T_{\gamma,h,\zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - z_{\gamma,h}) \right](z).$$

Por lo tanto, $D_h(z)$ es analítica en $z \in B_{\pi/h}$.

Evaluando (144) en $z = z_{\gamma,h}$, obtenemos la ecuación secular para γ :

$$(145) \quad \gamma \sqrt{1 + \frac{h^2 \gamma^2}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 - \varepsilon T_{\gamma,\zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - z_{\gamma,h}) \right](z_{\gamma,h}).$$

Consideremos la función

$$\begin{aligned} G_h(\gamma, \varepsilon) &\equiv \gamma \sqrt{1 + \frac{h^2 \gamma^2}{4}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 - \varepsilon T_{\gamma,\zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - z_{\gamma,h}) \right](z_{\gamma,h}) \\ &= \gamma \sqrt{1 + \frac{h^2 \gamma^2}{4}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \left[T_{\gamma,\zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - z_{\gamma,h}) \right](z_{\gamma,h}). \end{aligned}$$

Ya que $[T_{\gamma,\zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - i\gamma)](z_{\gamma,h})$ es analítica en γ también, por el teorema de Hartogs, tenemos que $G_h(\gamma, \varepsilon)$ es analítica en $\mathbf{C}^2$. Así, por las igualdades $G_h(0, 0) = 0$, $[\partial_\gamma G_h](0, 0) = 1$ y el teorema de la función implícita, la solución $\gamma_h(\varepsilon)$ para γ de la ecuación secular (145), la cual tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe y es única. Está dada por (9), ya que expandiendo $G_h(\gamma, \varepsilon)$ en serie de Taylor, tenemos, hasta términos del segundo orden,

$$G_h(\gamma, \varepsilon) = \gamma - \varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{2}} W(0) - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Gamma_{c,h}} \frac{W(\zeta) W(-\zeta)}{\frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta - \dots$$

Además, por sustitución de (9) en (144) obtenemos $D_h(z)$. En la misma forma que antes, podemos verificar que $D_h(z_{\gamma_h(\varepsilon),h}) = 1$. Así los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2 quedan probados.

Agradecimientos

El primer autor agradece profundamente a Dios, a su familia, a la Universidad Michoacana, al CONACyT, al Dr. Petr Zhevandrov por su valiosa asesoría y a la revista *Morfismos*.

Joel Arturo Rodríguez-Ceballos
Instituto de Física y Matemáticas,
 Universidad Michoacana de San Ni-
 colás de Hidalgo,
 Edificio C3, Ciudad Universitaria -
 58060
 Morelia, Michoacán, México.
 joel@ifm.umich.mx

Petr Zhevandrov Bolshakova
Facultad de Ingeniería,
 Universidad de la Sabana,
 Campus Puente del Común,
 Km. 21 Autopista Norte, Chía,
 Colombia; con licencia de la
Facultad de Ciencias Físico-Mate-
máticas,
 Universidad Michoacana de San
 Nicolás de Hidalgo,
 Edificio B Planta Baja, Ciudad
 Universitaria - 58060
 Morelia, Michoacán, México.
 pzhevand@zeus.umich.mx

Referencias

- [1] Albeverio S.; Gesztesy F.; Høegh-Krohn R.; Holden H., Solvable Models in Quantum Mechanics, Springer-Verlag, 1988.
- [2] Berezin F. A.; Shubin M. A., The Schrödinger Equation, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [3] Egorov Yu. V.; Schulze B. W., Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications, Birkhäuser Verlag, 1997.
- [4] Fedoryuk M. V., Asymptotics integrals and Series, Nauka, 1987.
- [5] Gadyl'shin R., *Local perturbations of the Schrödinger operator on the axis*, Theor. Math. Phys. **132** (2002), 976–982.
- [6] Gasquet C.; Witomski P., Fourier Analysis and Applications. Filtering, Numerical Computation, Wavelets, Springer-Verlag, 1999.
- [7] Greenspan D., Discrete Models, Addison-Wesley, 1973.

- [8] Gunning R. C.; Rossi H., *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall, 1965.
- [9] Hörmander L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland, 1973.
- [10] Landau L. D.; Lifschitz E. M., *Quantum Mechanics*, Pergamon, 1958.
- [11] Maslov V. P., *Asymptotic Methods and Theory of Perturbations*, Nauka, 1988.
- [12] Montvay J.; Münster G., *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 1994.
- [13] Rodriguez J. A.; Zhevandrov P., *Shallow potential wells for the discrete Schrödinger equation*, En: *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES 2003*, Springer-Verlag 2003, 857–861.
- [14] Rozenblum G. V.; Shubin M. A.; Solomyak M. Z., *Spectral Theory of Differential Operators*, En: *Partial Differential Equations*, **VII**, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 64, Springer-Verlag 1994.
- [15] Saint Raymond X., *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*, CRC Press, Florida, 1991.
- [16] Simon B., *The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two-dimensions*, *Ann. Phys.* **97** (1976), 279–288.
- [17] Taylor M., *Partial Differential Equations*, Vol. I Basic Theory, Springer-Verlag, 1996.
- [18] Treves F., *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, Vol. I, Plenum Press, 1982.
- [19] Zhevandrov P.; Merzon A., *Asymptotics of eigenfunctions in shallow potential wells and related problems*, *AMS Translations*, series 2, 208 (2003), 235–284.
- [20] Zhevandrov P.; Merzon A., *Shallow potential wells for the Schrödinger equation and water waves*, En: *Progress in Analysis*, *Proceedings of the 3rd International ISAAC Congress*, World Scientific, 1 2003, 589–598.