**Morfismos**, Vol. 10, No. 2, 2006, pp. 15–43

# Valores irracionales de la función zeta de Riemann en los impares *

Pedro Aceves Sánchez
Florian Luca
Juan Pablo Maldonado López
Diego F. Núñez Sabbagh
Ricardo Noel Pacheco Venegas

**Resumen**

En este trabajo daremos la prueba detallada del teorema de Ball y Rivoal, presentada en el 2001, sobre el hecho de que la sucesión $\{\zeta(2n+1)\}_{n\geq 1}$ contiene una infinidad de números irracionales.

*2000 Mathematics Subject Clasification: 11J82, 11M06, 33C20.*
*Palabras y expresiones claves: función zeta de Riemann, números irracionales.*

## 1. Introducción

La irracionalidad de $\pi$ fue conjeturada por Aristóteles. La primera prueba de este hecho fundamental se debe a Lambert en 1766. Una prueba muy elegante fue dada por Niven [3]. Adaptando las ideas de la prueba de transcendencia de $e$ de Hermite [2], Lindemann probó en 1882 que $\pi$ es transcendental, es decir no cumple ninguna ecuación polinomial con coeficientes racionales. Para $s > 1$ ponemos

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

*Artículo realizado como parte del "Taller Aprendiendo a Investigar en Morelia", del 21 de Agosto al 2 de Septiembre de 2005, realizado con el apoyo del proyecto PAPIIME-UNAM, EN-100304.

para la función zeta de Riemann. Euler probó que

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!},$$

donde los coeficientes $(B_{2m})_{m\geq 0}$ se obtienen como los coeficientes de la serie

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \sum_{m\geq 0} B_{2m} \frac{z^{2m}}{(2m)!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

En particular, $B_{2n} \in \mathbb{Q}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo que prueba que $\zeta(2n)$ es irracional para cada $n \in \mathbb{N}$. Nada se supo del comportamiento de $\zeta(2k+1)$ para $k \in \mathbb{N}$ hasta en 1978 cuando Apéry probó que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$. Una exposición del método de Apéry se encuentra en [5].

En 2001, Ball y Rivoal [1] probaron que la sucesión $\{\zeta(2k+1)\}_{k\geq 1}$ contiene una infinidad de irracionales, resultado que exponemos en este trabajo (Teorema 1.1). Cabe mencionar que todavía no se sabe si $\zeta(5)$ es irracional o no, aunque Zudilin [6] probó que uno de los números $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ y $\zeta(11)$ es irracional.

**Teorema 1.1.** *La sucesión* $\{\zeta(2k+1)\}_{k\geq 1}$ *contiene una infinidad de números irracionales.*

## 2. Resultados auxiliares

Primero vamos a recordar un poco de terminología. Si $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de números complejos con $b_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots$, entonces decimos que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son *equivalentes*, y escribimos $a_n \sim b_n$, si $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = 1$.

Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Decimos que $f$ *es o-pequeño de* $g$ si $\lim_{n\to+\infty} f(n)/g(n) = 0$. En este caso, escribimos $f = o(g)$.

Para un número complejo $\alpha$ y un entero positivo $k$ escribimos

$$(\alpha)_k = (\alpha)(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$$

y le llamamos *el símbolo de Pochammer*. No es difícil darse cuenta que el símbolo de Pochammer cumple la propiedad

$$(\alpha)_k = (-1)^k(-\alpha-k+1)_k. \tag{1}$$

Las siguientes funciones jugarán un papel muy importante en lo que sigue. Para un número complejo $z \neq 0$ y enteros positivos $a,\ n,\ r$ con $r < a/2$, ponemos

$$R_n(z) = \frac{(z - rn + 1)_{rn}(z + n + 2)_{rn}}{(z + 1)_{n+1}^a}, \tag{2}$$

$$S_n(z) = n!^{a-2r} \sum_{k \geq 0} R_n(k) z^{-k}, \tag{3}$$

y

$$\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{(k + 1)^n}, \qquad (|z| \leq 1), \quad \text{y } n > 1. \tag{4}$$

Es fácil ver que $\mathrm{Li}_n(z)$ converge para $|z| \leq 1$ si $n \geq 2$ por que

$$|\mathrm{Li}_n(z)| \leq \mathrm{Li}_n(|z|) \leq \mathrm{Li}_n(1) = \zeta(n),$$

por otro lado, si $n = 1$ y $|z| < 1$, el resultado se sigue por el criterio de la raíz. Además, se tiene

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z| < 1}} \mathrm{Li}_n(z) = \zeta(n), \qquad (n \geq 2). \tag{5}$$

Para ver el límite (5), observamos que si $n \geq 2$ y $|z| < 1$, entonces

$$\begin{aligned} |\mathrm{Li}_n(z) - \zeta(n)| &\leq \sum_{k \geq 1} \frac{|z^k - 1|}{k^n} \leq |z - 1| \sum_{k \geq 1} \frac{1 + |z| + \cdots + |z|^{k-1}}{k^n} \\ &< |z - 1| \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{n-1}} = |z - 1| \zeta(n - 1), \end{aligned}$$

mientras que si $n = 2$, entonces observamos que para cada $N > 1$

natural

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Li}_2(z)-\zeta(n)| &\leq \sum_{k=1}^{N}\frac{|z^k-1|}{k^2}+\sum_{k>N}\frac{2}{k^2}\\
&\leq |z-1|\sum_{k=1}^{N}\frac{1+|z|+\cdots+|z|^{k-1}}{k^2}+2\sum_{k\geq N}\frac{1}{k(k+1)}\\
&< |z-1|\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\right)+2\sum_{k\geq N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&\leq |z-1|\left(1+\int_1^N\frac{dt}{t}\right)+\frac{2}{N}\\
&= |z-1|(1+\log N)+\frac{2}{N}.
\end{aligned}$$

Poniendo $N=\lfloor(1-z)^{-1}\rfloor$, haciendo $z\to 1$, y usando el hecho de que $\lim_{x\to 0} x\log(1/x)=0$, obtenemos el límite (5) para $n=2$.

En lo que sigue deduciremos una identidad que utilizaremos más adelante. Comencemos multiplicando por $z$ a ambos lados de la ecuación (4) en $n=1$ para obtener

$$z\mathrm{Li}_1(z)=\sum_{k\geq 0}\frac{z^{k+1}}{k+1},\qquad (|z|<1).$$

Derivando ambos lados de la formula de arriba obtenemos

$$\frac{d}{dz}\left(z\mathrm{Li}_1(z)\right)=\frac{d}{dz}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{z^{k+1}}{k+1}\right)=\sum_{k\geq 1}z^k=\frac{z}{1-z},\qquad (|z|<1).$$

Integrando la relación de arriba respecto a $z$, evaluando en 0 y después dividiendo por $z$ obtenemos

$$\mathrm{Li}_1(z)=-\frac{\log(1-z)}{z}-1,$$

donde log denota una rama donde la función logaritmo natural está bien definida. En particular,

$$\lim_{\substack{|z|<1\\ z\to 1}}(z-1)\mathrm{Li}_1(z)=-\lim_{\substack{|z|<1\\ z\to 1}} z^{-1}(z-1)\left(\log(1-z)+z\right)=0. \tag{6}$$

El siguiente lema es bastante conocido.

**Lema 2.1.** *Sea $P(z) = Q(z)/R(z)$, donde $Q(z),\ R(z) \in \mathbb{C}[z]$. Suponemos que*

$$R(z) = (z - z_1)^{l_1}(z - z_2)^{l_2} \cdots (z - z_k)^{l_k}$$

*donde $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_k$ son las raíces distintas de $R(z)$ y $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_k$ son sus multiplicidades. Entonces*

$$P(z) = F(z) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{l=l_j} \frac{c_{l,j}}{(z - z_j)^l}, \tag{7}$$

*en donde*

$$c_{l,j} = \frac{1}{(l_j - l)!} \frac{d^{l_j - l}}{dz^{l_j - l}} (R(z)(z - z_j)^{l_j})\Big|_{z = z_j},$$

*y $F(z) \in \mathbb{C}[z]$ es de grado $\leq \mathrm{grado}(Q) - \mathrm{grado}(R)$.*

*Demostración.* Comencemos con la siguiente identidad

$$P(z) = F(z) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{l_j} \frac{c_{l,j}}{(z - z_j)^l},$$

que se conoce por el desarrolo en fracciones parciales. Para obtener el coeficiente $c_{l,j}$, multiplicamos $P(z)$ por $(z - z_j)^{l_j}$ y de esta forma obtenemos

$$P(z)(z - z_j)^{l_j} = \sum_{l=1}^{l_j} c_{l,j}(z - z_j)^{l_j - l} + (z - z_j)^{l_j} G(z),$$

en donde $G(z)$ es una función analítica en una vecindad de $z_j$. Ahora derivando la relación de arriba $l_j - l$ veces y evaluando el resultado en $z = z_j$, obtenemos precisamente

$$\frac{d^{l_j - l}}{dz^{l_j - l}} \Big( R(z)(z - z_j)^{l_j} \Big) \Big|_{z = z_j} = (l_j - l)! c_{l,j}.$$

□

Si $\lambda \geq 1$ es un entero, denotamos

$$D_\lambda = \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}.$$

Con esta notación y la ayuda del Lema 2.1, podemos expresar $R_n(z)$ en fracciones parciales. Comencemos este desarrolo por observar que los únicos polos de $R_n(z)$ son $\{-1,-2,\ldots,-j-1\}$ y cada uno es de orden $a$. Además, su grado es $2rn-a(n+1)=n(2r-a)-a<0$, por lo tanto $F(z)=0$ en la fórmula (7) para $P(z)=R_n(z)$ y

$$R_n(z)=\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n}\frac{c_{l,j,n}}{(z+j+1)^l}, \tag{8}$$

donde

$$c_{l,j,n}=D_{a-l}(R_n(t)(t+j+1)^a)\Big|_{t=-j-1}.$$

Además es claro que $c_{l,j,n}\in\mathbb{Q}$.

Ahora introducimos los siguientes polinomios:

$$P_{0,n}(z)=-\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}c_{l,j,n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(k+1)^l}z^{j-k}, \tag{9}$$

$$P_{l,n}(z)=\sum_{j=0}^{n}c_{l,j,n}z^j, \qquad \text{si } l\geq 1. \tag{10}$$

El siguiente lema muestra que bajo algunas hípótesis acerca de las paridades de $n$ y $a$, el número $S_n(1)$ es una combinación lineal de $\zeta(2k+1)$ para $1\leq k\leq (a-1)/2$.

**Lema 2.2.** *Sean $a$ y $n$ enteros positivos. Entonces*

$$S_n(1)=P_{0,n}(1)+\sum_{l=2}^{a}P_{l,n}(1)\zeta(l). \tag{11}$$

*Además, si $(n+1)a+l$ es impar, se tiene que $P_{l,n}(1)=0$. En particular, si $n$ es par y $a\geq 3$ es impar, entonces $P_{l,n}(1)=0$ para toda $l\in\{2,\ldots,a\}$ par, y por lo tanto $S_n(1)$ es una combinación lineal de los $\zeta$ evaluado en los enteros impares:*

$$S_n(1)=P_{0,l}(1)+\sum_{l=1}^{\frac{a-1}{2}}P_{2l+1,n}(1)\zeta(2l+1). \tag{12}$$

*Demostración.* Sustituyendo el desarrollo (8) de $R_n(k)$ en fracciones parciales en $S_n(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{z^k}\frac{1}{(t+j+1)^l} \\ &= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j \left( \sum_{k\geq 0} \frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+1)^l} - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+1)^l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{a} \mathrm{Li}_l\left(\frac{1}{z}\right) \sum_{j=0}^{n} c_{j,l,n} z^j - \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l} z^{j-k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S_n(z) = \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z)\mathrm{Li}_l\left(\frac{1}{z}\right) + P_{0,n}(z).$$

Como $2r < a$, el grado total de la fracción racional $R_n(t)$ es $n(a-2r) - a \leq -3$. Por lo tanto,

$$P_{1,n}(1) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Res}\left[ R_n(t)\Big|_{t=-j} \right] = 0,$$

y en particular $P_{1,n}(z)$ es un polinomio que es divisible por $z-1$. Usando (6), concluimos que

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|>1}} P_{1,n}(z)\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Como

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \mathrm{Li}_n(z) = \zeta(n),$$

para $n \geq 2$ (ver la fórmula (5)), esto demuestra la primera igualdad.

Ahora mostraremos que si $n$ es par y $a \geq 3$ es impar, entonces $P_{l,n} = 0$ para todo $l$ par en $\{2,\ 3,\ \ldots,\ a\}$. Comencemos por notar que

$$c_{l,j,n} = (-1)^{a-l} D_{a-l}(\Phi_{n,j}(x))\Big|_{x=j},$$

en donde

$$\begin{aligned}\Phi_{n,j}(x) &= R_n(-x-1)(j-x)^a\\ &= n!^{a-2r}\frac{(-x-rn)_{rn}(-x+n+1)_{rn}}{(-x)_{n+1}^a}(j-x)^a.\end{aligned}$$

Entonces

$$\Phi_{n,n-j}(n-x) = n!^{a-2r}\frac{(x-(r+1)n)_{rn}(x+1)_{rn}}{(x-n)_{n+1}^a}(x-j)^a.$$

Aplicando la identidad de Pochammer tres veces obtenemos

$$\begin{aligned}&\Phi_{n,n-j}(n-x) =\\ &= n!^{a-2r}\frac{(-1)^{rn}(-x+n+1)_{rn}(-1)^{rn}(-x-rn)_{rn}}{(-1)^{(n+1)a}(-x)_{n+1}^a}(-1)^a(j-x)^a\\ &= (-1)^{an}\Phi_{n,j}(x),\end{aligned}$$

y por lo tanto, si $k \geq 0$ es un entero, entonces

$$\Phi_{n,n-j}^{(k)}(n-x) = (-1)^k(-1)^{na}\Phi_{n,j}^{(k)}(x).$$

En particular, con $k = a-l$ y $x = j$, se tiene que

$$c_{l,n-j,n} = (-1)^{a-l}(-1)^{na}c_{l,j,n},$$

asi que

$$P_{l,n}(1) = (-1)^{(n+1)a+l}P_{l,n}(1).$$

Por lo tanto, deducimos que $P_{l,n} = 0$ si $(n+1)a+l$ es impar. $\square$

Consideremos el polinomio

$$Q_{r,a}(s) = rs^{a+2} - (r+1)s^{a+1} + (r+1)s - r. \tag{13}$$

Observemos que

$$Q_{r,a}(s) = s^{a+1}(rs-r-1) + ((r+1)s-r) < 0 \qquad \text{si } s \in \left[0,\ \frac{r}{r+1}\right].$$

Además,

$$Q'_{r,a}(s) = r(a+2)s^{a+1} - (r+1)(a+1)s^a + r + 1$$

y

$$Q''_{r,a}(s) = (a+1)s^{a-1}(r(a+2)s - (r+1)a),$$

de donde se ve fácil que

$$Q'_{r,a}(0) = r+1 > 0 \qquad \text{y} \qquad Q'_{r,a}(1) = 2r - a < 0.$$

Como $Q''_{r,a}(s) < 0$ para toda $s \in [0,\ 1]$, concluimos que $Q_{r,a}(s)$ tiene una sola raíz $s_0 \in [0,\ 1]$, y que dicha raíz está en el intervalo $(r/(r+1),\ 1)$.

**Lema 2.3.** *Se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} |S_n(1)|^{1/n} = \varphi_{r,a}, \tag{14}$$

*de donde*

$$\varphi_{r,a} = ((r+1)s_0 - r)^r (r+1-rs_0)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r}.$$

*Además, se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $0 < \varphi_{r,a} \leq 2^{r+1} r^{-a+2r}$,

*(ii)* $e^a \varphi_{r,a} < 1$ *si* $r \in (e^4, a/4)$ *y* $a > 4e^4$.

*Demostración.* Consideremos

$$\widetilde{R}_n(k) = n!^{a-2r} \frac{(k-rn+1)_{rn}(k+n+2)_{rn}}{(k+2)_n^a} = (k+1)^a R_n(k), \tag{15}$$

si $r < a/2$. Obviamente si $0 \leq k \leq rn-1$, entonces $\widetilde{R}_n(k) = 0$.

Nótese que

$$(k-rn+1)_{rn} = (k-rn+1)\cdots(k) = \frac{k!}{(k-rn)!},$$

y de manera similar

$$(k+n+2)_{rn} = \frac{(k+n(r+1)+1)!}{(k+n+1)!} \qquad \text{y} \qquad (k+2)_n^a = \frac{(k+n+1)!^a}{(k+1)!^a},$$

por lo que haciendo una simple sustitución se observa que

$$\widetilde{R}_n(k) = n!^{a-2r} \frac{k!(k+1)!^a (k+n(r+1)+1)!}{(k-rn)!(k+n+1)!^{a+1}}. \tag{16}$$

Puesto que $\widetilde{R}_n(k) = 0$ para $0 \leq k \leq rn - 1$ y que $r < a/2$, se ve fácilmente de (15) que

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_n(k) &< n!^{a-2r} \frac{(k + n(r+2))^{2rn}}{k^{an}} \\ &= \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{a-2r} \left(\frac{k}{n}\right)^{-n(a-2r)} \left(1 + (r+2)\frac{n}{k}\right)^{2rn} \\ &< \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{a-2r} \left(\frac{k}{n}\right)^{-n(a-2r)} e^{2r(r+2)n(n/k)}, \end{aligned} \tag{17}$$

mientras que (ver (15) de nuevo)

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_n(k) &> n!^{a-2r} \frac{(k - rn)^{2rn}}{(k+2n)^{an}} \\ &= \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{a-2r} \left(\frac{k}{n}\right)^{-n(a-2r)} \left(1 - r\frac{n}{k}\right)^{2rn} \left(1 + 2\frac{n}{k}\right)^{-an} \\ &> \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{a-2r} \left(\frac{k}{n}\right)^{-n(a-2r)} e^{-(r^2+2a)n(n/k)}, \end{aligned} \tag{18}$$

si $k > 2rn$. En las desigualdades de arriba, hemos usado el hecho de que $1 + x < e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $1 - x > e^{-x/2}$ si $x \in (0, 1/2)$ (esta última con $x = rn/k$). Los cálculos de arriba muestran fácilmente que si $n$ es fijo, entonces existe $c = c(a,r) > 0$ tal que

$$\max_{0 \leq k} \widetilde{R}_n(k) = \max_{rn \leq k \leq cn} \widetilde{R}_n(k). \tag{19}$$

De hecho, un cálculo fácil basado en (17) y (18) muestra que se puede tomar $c = e^{4a^2}$. Llamémosle a este máximo (19) simplemente $M_n$.

Ahora bien, sabemos que

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} R_n(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-a} \widetilde{R}_n(k) z^{-k}$$

(ver la fórmula (3)). Entonces, como

$$\sum_{rn \leq k} (k+a)^{-a} < 1 \qquad \text{y} \qquad \widetilde{R}_n(k) \geq 0,$$

deducimos que

$$\frac{M_n}{(cn)^a} \leq S_n(1) \leq M_n. \tag{20}$$

Por lo tanto, basta probar que $M_n^{1/n}$ converge a $\varphi_{r,a}$.

A continuación usaremos la fórmula de Stirling cuya demostración se encuentra en mucho libros de cálculo.

$$n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}, \qquad \text{para } n \to \infty. \tag{21}$$

Las fórmulas (21) y (16) nos brindan una nueva perspectiva del tamaño de $\widetilde{R}_n(k)$:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{R}_n(k) = \\
&\quad = \frac{n!^{a-2r}(k+n(r+1))!(k!)^{a+1}}{(k-rn)!(k+n)!^{a+1}} \left(\frac{k+1}{k+n+1}\right)^a \frac{k+n(r+1)+1}{k+n+1} \\
&\quad = \frac{n^{a-2r}(k+n(r+1))^{k+n(r+1)} k^{k(a+1)}}{(k-rn)^{k-rn}(k+n)^{(a+1)(k+n)}} \rho_n(k),
\end{aligned}$$

donde $\rho_n(k)$ es equivalente a

$$\left(\frac{k+1}{k+n+1}\right)^a \frac{k+n(r+1)+1}{k+n+1} \frac{n^{\frac{a-2r}{2}}(k+n(r+1))^{\frac{1}{2}} k^{\frac{a+1}{2}}}{(k-rn)^{\frac{1}{2}}(k+n)^{\frac{a+1}{2}}} (2\pi)^{\frac{a-2r}{2}}.$$

Por lo tanto, como $rn \leq k \leq cn$, tenemos que $\rho_n(k)^{1/n} \to 1$. Sea

$$F(x) = \frac{x^{x(a+1)}(x+r+1)^{x+r+1}}{(x+1)^{(x+1)(a+1)}(x-r)^{x-r}}.$$

Observemos que

$$|\widetilde{R}_n(k)|^{1/n} = F(k/n),$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |M_n|^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \max_{k\in[rn,cn]} |\widetilde{R}_n(k)|^{1/n} = \\
&= \max_{x\in[r,c]} F(x) = \max_{x\geq r} F(x) = F(x_0),
\end{aligned} \tag{22}$$

para algún $x_0 \geq r$. Escribiendo

$$F(x) = \exp G(x),$$

en donde

$$\begin{aligned}
G(x) &= x(a+1)\log x + (x+r+1)\log(x+r+1) \\
&- (x+1)(a+1)\log(x+1) - (x-r)\log(x-r),
\end{aligned}$$

para encontrar el máximo de $F(x)$ derivamos con respecto a $x$ e igualamos con cero obteniendo

$$F'(x_0) = e^{G(x_0)}G'(x_0) = 0,$$

y por lo tanto $G'(x_0) = 0$. Es claro que

$$\begin{aligned} 0 &= G'(x_0) \\ &= (a+1)\log x_0 + (a+1) + \log(x_0+r+1) + 1 \\ &\quad - (a+1)\log(x_0+1) - (a+1) - \log(x_0-r) - 1 \\ &= (a+1)\log x_0 - (a+1)\log(x_0+1) \\ &\quad + \log(x_0+r+1) - \log(x_0-r), \end{aligned}$$

que nos da

$$(x_0+r+1)x_0^{a+1} - (x_0-r)(x_0+1)^{a+1} = 0.$$

Al hacer un cambio de variable $x_0 = s_0/(1-s_0)$, la fórmula de arriba nos dice que $s_0$ es una raíz de $Q_{r,a}$. Además, como $x_0 \geq r$, deducimos que $s_0 \in (\frac{r}{r+1}, 1)$. Por lo tanto, que $F(x)$ alcanza su máximo en $x_0 = s_0/(1-s_0)$. Para calcular $F(x_0)$, observamos que

$$\begin{aligned} F(x_0) &= \left(\frac{x_0^{a+1}(x_0+r+1)}{(x_0+1)^{a+1}(x_0-r)}\right)^{x_0} \frac{(x_0+r+1)^{r+1}(x_0-r)^r}{(x_0+1)^{a+1}} \\ &= \frac{(x_0+r+1)^{r+1}(x_0-r)^r}{(x_0+1)^{a+1}}, \end{aligned}$$

y sustituyendo $x_0 = s_0/(1-s_0)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} &F(x_0) = \\ &= \frac{1}{(1-s_0)^{2r+1-a-1}} \frac{(s_0+(r+1)(1-s_0))^{r+1}(s_0-r(1-s_0))^r}{(s_0+(1-s_0))^{a+1}} \\ &= \phi_{r,a}. \end{aligned} \tag{23}$$

El límite (14) se obtiene ahora inmediatamente de (20), (22) y (23). Para probar (i), notemos que por la desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^a > 1 + ax \qquad \text{si } x > 0 \text{ y } a > 1,$$

tenemos

$$\begin{aligned} 2^{1+1/r}k &= (1+1)^{1+1/r}k > \left(1 + \left(1 + \frac{1}{r}\right)\right)k = 2k + \frac{k}{r} \\ &= k + \frac{k(r+1)}{r} > k + n(r+1), \qquad \text{para } k > rn, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_n(k) &< n^{(a-2r)n}k^{rn}\frac{1}{(k+1)^{(a-r)n}}\left(\frac{k+n(r+1)+1}{k+1}\right)^{rn} \\
&< n^{(a-2r)n}k^{rn}\frac{1}{k^{(a-r)n}}\left(\frac{k+n(r+1)}{k}\right)^{rn} \\
&< \left(\frac{n}{k}\right)^{a-2r}\left(\frac{2^{1+1/r}k}{k}\right)^{rn} \\
&\leq \left(\frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}}\right)^{n},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad de arriba se cumple por que $k/n \geq r \geq 1$. Aquí hemos usado también el hecho de que $(y+1)/(x+1) < y/x$ si $0 < x < y$. Tomando raíces $n$-esimas y pasando al límite con $n$ obtenemos (i). Para (ii), basta hacer notar que si $r < a/4$, entonces $a - 2r > a/2$, y por lo tanto

$$e^a\phi_{r,a} < e^a\frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}} < \frac{e^{2a}}{r^{a/2}} = \left(\frac{e^4}{r}\right)^{a/2} < 1$$

si $r > e^4$. $\square$

**Lema 2.4.** *Sea $a$ un entero. Para $\ell \in \{0,\dots,a\}$, se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\limsup_{n\to\infty}|P_{l,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.$$

*Demostración.* Tomemos $\ell \in \{1,\dots,a\}$. Usando la fórmula integral de Cauchy, reescribamos a $c_{l,j,n}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
c_{l,j,n} &= \\
&= D_{a-l}\left(R_n(t)(t+j+1)^a\right)_{|t=-j-1} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{R_n(z)(z+j+1)^a}{(z+j+1)^{a-l+1}}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_n(z)(z+j+1)^{l-1}dz, \qquad (24)
\end{aligned}$$

donde $\gamma$ es el círculo de radio $1/2$ con centro en $-j-1$.

Para $z \in \gamma$ y $k \in \mathbb{Z}$ tenemos:

$$|z-k+1| \leq j+k+1 \qquad \text{para } k = 1,\ \dots,\ rn. \qquad (25)$$

Multiplicando las desigualdades (25) obtenemos

$$|(z-rn+1)_{rn}| \leq (j+2)_{rn}. \tag{26}$$

Además,

$$|z+n+k+1| \leq n-j+k+1 \qquad \text{para } k=1,\ \ldots,\ rn. \tag{27}$$

Multiplicando las desigualdades (27) se tiene:

$$|(z+n+2)_{rn}| \leq (n-j+2)_{rn}. \tag{28}$$

Finalmente

$$|z+j+k| \geq |k-1|-1/2, \qquad \text{para toda } k \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Tomando primeramente $k=0,\ \ldots,\ n-j+1$, y enseguida $k=-1,\ldots,$ $-j+1$ en la desigualdad (29), y multiplicando las desigualdades que resultan se tiene que:

$$|(z+1)_{n+1}| \geq 2^{-3}(j-1)!(n-j-1)!. \tag{30}$$

Por lo tanto, multiplicando las desigualdades (26), (28) y (30) y usando (24) obtenemos

$$\begin{aligned}
|c_{l,j,n}| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma |R_n(z)(z+j+1)^{l-1}||dz| \\
&\leq \frac{(rn+j+1)!}{(j+1)!}\,\frac{((r+1)n-j+1)!}{(n-j+1)!}\,\frac{8^a n!^{a-2r}}{((j-1)!(n-j-1)!)^a} \\
&\leq \frac{(rn+j+1)!}{(j+1)!(j!(n-j)!)^r}\,\frac{((r+1)n-j+1)!}{(n-j+1)!(j!(n-j)!)^r} \\
&\times \left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)^{a-2r}(j(n-j))^a 8^a.
\end{aligned}$$

Para acotar los coeficientes multinomiales, usamos la igualdad

$$(x_1+\cdots+x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n\\ n_i\geq 0}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} x_1^{n_1}\cdots x_k^{n_k}$$

con $x_1=x_2=\cdots=x_k=1$. De esta manera,

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} \leq k^n.$$

Junto con

$$j(n-j) \leq \left(\frac{j+(n-j)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} |c_{l,j,n}| &\leq (2r+1)^{rn+j+1}(2r+1)^{(r+1)n-j+1}2^{(a-2r)n}(2n^2)^a \\ &= (2r+1)^{(2r+1)n+2}2^{(a-2r)n}(2n^2)^a. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |P_{l,n}(1)|^{1/n} &= \limsup_{n\to\infty} \left|\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n}\right|^{1/n} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \left((n+1)(2r+1)^{(2r+1)n+2}2^{(a-2r)n}(2n^2)^a\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}. \end{aligned}$$

Si $l=0$,

$$|P_{0,n}(1)| = \left|\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(k+1)^l}\right| \leq \left|n\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n}\right|,$$

puesto que

$$\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(k+1)^l} \leq \sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(k+1)} \leq j \leq n,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |P_{0,n}(1)|^{1/n} &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(n^2a(2r+1)^{(2r+1)n+2}2^{(a-2r)n}(2n^2)^a\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Recordemos del cálculo elemental la regla de Leibniz

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$

para funciones derivables $f$ y $g$. Si las funciones $f$ y $g$ son derivables $n$ veces, podemos generalizar de manera natural el resultado anterior, obteniendo

$$(fg)^{(n)} = \sum_{s=0}^{n} f^{(n-s)}g^{(s)}\binom{n}{s}.$$

La prueba de la fórmula de arriba se puede hacer por inducción sobre $n$. Otra generalización para la fórmula de Leibniz es considerar el producto de $k$ funciones, todas ellas diferenciables $n$ veces. Entonces, usando nuevamente inducción, ahora sobre $k$ y $n$, obtenemos que

$$(f_1 f_2 \cdots f_k)^{(n)} = \sum_{\substack{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k=n \\ \mu_i\geq 0}} f_1^{(\mu_1)} f_2^{(\mu_2)} \cdots f_k^{(\mu_k)} \binom{n}{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k},$$

lo que se puede también escribir como

$$D_n (f_1 f_2 \cdots f_k) = \tag{31}$$
$$= \sum_{\substack{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k=n \\ \mu_i\geq 0}} D_{\mu_1}(f_1) D_{\mu_2}(f_2) \cdots D_{\mu_k}(f_k) \binom{n}{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k}.$$

**Lema 2.5.** *Sea* $d_n = mcm[1, 2, ...n]$. *Entonces, para* $l \in \{0, 1, \ldots, a\}$, *se tiene que*

$$d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z].$$

*Demostración.* Reescribiremos $R_n(t)$ para poder obtener información sobre los coeficientes $c_{l,j,n}$. Dejemos fijos a $n$ y $j$. Tenemos que

$$R_n(t)(t+j+1)^a = \left(\prod_{l=1}^{r} F_l(t)\right) \times \left(\prod_{l=1}^{r} G_l(t)\right) \times H(t)^{a-2r},$$

donde, para $l \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ r\}$,

$$F_l(t) = \frac{(t-nl+1)_n}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1), \qquad G_l(t) = \frac{(t+nl+2)_n}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1),$$

y

$$H(t) = \frac{n!}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1).$$

Pongamos ahora

$$F_l(t) = 1 + \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq j}}^{n} \frac{A_{l,m}}{t+m+1},$$

donde $A_{l,m}$ son algunos coeficientes que vamos a determinar. Para calcular el coeficiente $A_{l,m}$, multiplicamos la expresión anterior por $(t+1)_{n+1}$

y evaluamos en $t = -m-1$. Haciendo esta operación para $F_l(t)$, obtenemos

$$A_{l,m} = (j-m)\frac{(-m-nl)_n}{\prod_{h=0,h\neq m}(-m+h)} = (j-m)\frac{(-1)^n((l-1)n+m+1)_n}{(-1)^m m!(n-m)!}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción de arriba por $n!$ obtenemos

$$A_{l,m} = (j-m)(-1)^{n-m}\binom{nl+m}{n}\binom{n}{m},$$

que es un entero divisible por $j-m$.

Análogamente, obtenemos que, al descomponer $G_l(t)$ y $H(t)$ en sumas parciales, los numeradores correspondientes a $t+m+1$ son enteros divisibles por $j-m$.

Notemos ahora que para un entero positivo $\lambda$ se tiene

$$(D_\lambda F_l(t))_{|t=-j-1} = \delta + \sum_{h=0,h\neq j}^{n} (-1)^\lambda \frac{A_{l,h}}{(h-j)^{\lambda+1}}, \qquad \delta \in \{0,1\}.$$

Como $A_{l,h}$ se divide por $h-j$, concluimos que al multiplicar la expresión de arriba por $d_n^\lambda$, obtenemos un entero. Análogamente,

$$d_n^\lambda(D_\lambda G_l)_{|t=-j-1} \in \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad d_n^\lambda(D_\lambda H)_{|t=-j-1} \in \mathbb{Z}.$$

Finalmente, por la fórmula de Leibniz (31), obtenemos

(32)
$$D_{a-l}(R(t)(t+j+1)^a) = \sum_{\substack{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_a=a-l \\ \mu_i\geq 0}} (D_{\mu_1}f_1)(D_{\mu_2}f_2)\cdots(D_{\mu_a}f_a),$$

donde $f_i \in \{F_1, \ldots, F_r, G_1, \ldots, G_r, H\}$ para $i = 1, \ldots, a$. Al multiplicar ambos lados de la igualdad (32) por $d_n^{a-l}$ y evaluar en $t = -j-1$, concluimos que los coeficientes $c_{l,j,n}$ son enteros, lo que termina la demostración de nuestro lema. $\square$

## 3. Demostración del Teorema 1.1

Para demostrar nuestro teorema, vamos a usar el siguiente resultado cuya demostración aparece al final de la sección 4.

**Teorema 3.1.** *Sean $N$ números reales $\theta_1, \dots, \theta_N$ ($N \geq 2$) y supongamos que existen sucesiones $(p_{\ell,n})_{n \geq 0}$ tal que*

*(i)* $p_{\ell,n} \in \mathbb{Z}$ *para todo* $\ell \in \{1, \dots, N\}$ *y* $n \geq 0$*;*

*(ii)* $\alpha_1^{n+o(n)} \leq \left| \sum_{\ell=1}^{N} p_{\ell,n} \theta_\ell \right| \leq \alpha_2^{n+o(n)}$ *con* $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$*;*

*(iii)* $|p_{\ell,n}| < \beta^{n+o(n)}$ *para todo* $\ell \in \{1, \dots, N\}$ *y* $n \geq 0$*, donde* $\beta > 1$*.*

*En estas condiciones,*

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}\theta_1 + \cdots + \mathbb{Q}\theta_N) \geq \frac{\ln \beta - \ln \alpha_1}{\ln \beta - \ln \alpha_1 + \ln \alpha_2}. \tag{33}$$

A continuación, recordemos el siguiente resultado.

**Lema 3.2.** *Sea $d_n = mcm[1, 2, \dots, n]$. Entonces se tiene que*

$$d_n = e^{n+o(n)},$$

*cuando $n \to \infty$.*

*Demostración.* Para un entero positivo $n$ ponemos

$$\pi(n) = \#\{p \leq n \ : \ p \text{ primo}\}.$$

El Teorema de los números primos afirma que $\pi(n) \sim n/\log n$. Ahora comencemos observando que

$$d_n = \prod_{\substack{1<p\leq n \\ p \text{ primo}}} p^{\lfloor \log n/\log p \rfloor} \leq \prod_{\substack{1<p\leq n \\ p \text{ primo}}} p^{\log n/\log p} = n^{\pi(n)} = e^{n+o(n)},$$

en donde la última igualdad se cumple gracias al Teorema de los números primos. Por otro lado, es claro que

$$\begin{aligned} \log d_n &\geq \sum_{\substack{1<p\leq n \\ p \text{ primo}}} \log p \geq \sum_{\substack{n/(\log n)^2 \leq p \leq n \\ p \text{ primo}}} \log p \\ &\geq \log\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right)\left(\pi(n) - \pi\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right)\right) \\ &\geq (1+o(1)) \log n \left(\frac{n}{\log n}(1+o(1)) - \frac{n}{(\log n)^2}\right) \geq n(1+o(1)), \end{aligned}$$

así que

$$d_n \geq e^{n(1+o(1))},$$

y por lo tanto $d_n = e^{n+o(n)}$. □

Si $n \geq 0$ es un entero, definimos

(34)
$$l_n = d_{2n}^a S_{2n}(1), \qquad p_{0,n} = d_{2n}^a P_{0,2n}(1) \qquad \text{y} \qquad p_{l,n} = d_{2n}^a P_{2l+1,2n}(1)$$

para $l \in \{1, \ \ldots, \ (a-1)/2\}$.

Para un entero impar $a \geq 5$ notemos con $\delta(a)$ la dimensión del espacio vectorial

$$\mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(5) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta(a).$$

Nuestro teorema principal será una consecuencia inmediata del siguiente resultado.

**Lema 3.3.** *Si $a > 4e^4$ es un entero impar y $r$ es un entero en $(e^4, \ a/4)$, entonces*

$$\delta(a) \ \geq \frac{(a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+1) - \log(\varphi_{r,a})}{a + (a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+1)},$$

*donde*

$$\varphi_{r,a} = ((r+1)s_0 - r)^r((1-s_0)r+1)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r},$$

*y $s_0$ es la raíz en $(r/r+1, 1)$ del polinomio $Q_{r,a}(s)$ que aparece en* (13). *En particular,*

$$\delta(a) \ \geq \frac{\log r + \frac{(a-r)}{(a+1)}\log 2}{1 + \log 2 + \frac{(2r+1)}{(a+1)}\log(r+1)}.$$

*Demostración.* Por el Lema 2.2,

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=1}^{\frac{a-1}{2}} P_{2l+1,n}(1)\zeta(2l+1).$$

Sustituyendo la relación de arriba en la definición (34) de $l_n$ obtenemos

$$l_n = p_{0,n} + \sum_{l=1}^{\frac{a-1}{2}} p_{l,n}\zeta(2l+1).$$

Verifiquemos que las hipótesis del Teorema 3.1 se cumplen. Primero, por el Lema 2.5 sabemos que $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$ para $l \in \{0, \ \ldots, \ (a-1)/2\}$ y $n \geq 0$. Por Lema 2.3, tenemos que

$$|S_{2n}(1)| \ = \ (\varphi_{r,a})^{2n(1+o(1))}.$$

Multiplicando la estimación de arriba por $d_{2n}^a$, tomando logaritmos, y usando el Lema 3.2, obtenemos

$$\log |l_n| = 2n \log(\kappa) + o(n), \qquad \text{en donde } \kappa = e^a \varphi_{r,a}.$$

Para $r > e^4$, tenemos que $\kappa < 1$ si $a > 4e^4$ (ver Lema 2.3). Análogamente, obtenemos que

$$\log |p_{l,n}| \leq 2n \log(\tau) + o(n), \qquad \text{en donde } \tau = e^a 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.$$

Es claro que $\tau > 1$. Aplicando el Teorema 3.1 con los valores $\alpha_1 = \alpha_2 = \kappa^2$ y $\beta = \tau^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta(a) &\geq \frac{\log \tau - \log \kappa}{\log \tau} \\ &= \frac{(a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+1) - \log(\varphi_{r,a})}{a + (a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+1)}. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad

$$\varphi_{r,a} \leq \frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}}$$

(ver (i) del Lema 2.3), se obtiene

$$\begin{aligned} \delta(a) &\geq \frac{(a-3r-1)\log 2 + (2r+1)\log(2r) + (a-2r)\log r}{a+1+(a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+2)} \\ &= \frac{(a-r)\log 2 + (a+1)\log(r)}{a+1+(a+1)\log 2 + (2r+1)\log(r+1)} \\ &= \frac{\log r + \frac{(a-r)}{(a+1)}\log 2}{1 + \log 2 + \frac{(2r+1)}{(a+1)}\log(r+1)}, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

**Teorema 3.4.** *Existe una constante $a_0$ tal que si $a \geq a_0$ es un entero impar, entonces*

$$\delta(a) \geq \frac{1}{8}\log a.$$

*Demostración.* Tomando $r = \lfloor \sqrt{a} \rfloor$ en el Lema 3.3 obtenemos que si $a > e^8$ (es decir $r > e^4$), entonces

$$\begin{aligned}
\delta(a) &\geq \frac{\log r + \frac{(a-r)}{(a+1)} \log 2}{1 + \log 2 + \frac{(2r+1)}{(a+1)} \log(r+1)} \\
&= \frac{\log(\lfloor \sqrt{a} \rfloor) + \frac{(a - \lfloor \sqrt{a} \rfloor)}{(a+1)} \log 2}{1 + \log 2 + \frac{(2\lfloor \sqrt{a} \rfloor + 1)}{(a+1)} \log(\lfloor \sqrt{a} \rfloor + 1)} \\
&\geq \frac{\frac{1}{2}(1 + o(1)) \log a}{1 + \log 2} > \frac{\log a}{8},
\end{aligned}$$

si $a$ es grande. □

Es posible obtener mejores cotas inferiores para $\delta(a)$ tomando otros valores de $r$. Para el propósito de nuestro Teorema 1.1, solamente es necesario hacer notar que $\delta(a)$ tiende a infinito con $a$, como corolario del Teorema 3.4.

Por lo tanto, el Teorema 1.1 queda demostrado. Sólo falta probar el Teorema 3.1, que es lo que haremos en la siguiente sección.

# 4. El Criterio de Nesterenko

En esta sección, daremos la prueba del Teorema 3.1.

## 4.1. Resultados previos del álgebra lineal

Consideremos un espacio vectorial $E \cong \mathbb{R}^m$ con producto escalar $(x, y)$ definido para $x, y \in E$ como $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$. Denotamos de manera usual la norma de un vector $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Se tienen entonces los siguientes hechos: Si $V \subset E$ es un subespacio vectorial de $E$, denotamos por $V^\perp$ al complemento ortogonal de $V$. Además, dado un vector $b \in E$, existen dos únicos vectores $b_V^\perp \in V^\perp$ y $b_V \in V$ tales que $b = b_V^\perp + b_V$.

**Lema 4.1.** *Los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_r \in E$ son linealmente independientes sobre $R$ $\Longleftrightarrow$ el determinante $\triangle_r = \det(\langle a_i, a_j \rangle)$ cumple que $\triangle_r > 0$.*

Con esta notación, escribimos el volumen del paralelepípedo formado por $a_1, a_2, \ldots, a_r$ como $\mathrm{Vol}(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \sqrt{\triangle_r}$. Tenemos también el siguiente resultado.

**Lema 4.2.** *Si $a_1, a_2, \ldots, a_r$ es una base de V, entonces para cualquier $b \in E$,*

$$\mathrm{Vol}(b, a_1, \ldots, a_r) = \|b_V^\perp\| \mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_r)$$

En lo siguiente, denotaremos por $V^*$ al espacio dual de $V$, es decir,

$$V^* = \{L : V \mapsto \mathbb{R} \ : \ L \text{ es una forma lineal}\}.$$

## 4.2. Lemas previos

Para simplificar un poco la notación en la demostración de los dos lemas siguientes, escribamos $\rho(b, V) = \|b_V^\perp\|$.

Tenemos entonces nuestro primer resultado.

**Lema 4.3.** *Sean $V_1$ y $V_2$ subespacios vectoriales de $E$ tales que $V_2 \subset V_1$. Entonces, dado $b \in E$*

$$\rho(b, V_2) \geq \rho(b, V_1).$$

La demostración es obvia.

Hasta ahora simplemente nos hemos ocupado de recordar algunos hechos conocidos del álgebra lineal en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, para la demostración del siguiente lema, es necesario hacer algunas definiciones y observaciones para el caso de espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$.

Decimos que un subespacio $V \subseteq E$ es *racional* si tiene la propiedad que los vectores que pertenecen a él son soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

Observemos ahora que si $V$ es un subespacio racional tal que $\dim V = m - r$, el conjunto de las formas lineales con coeficientes racionales que se anulan en $V$ es un subespacio de dimensión $r$ en $E^*$ sobre $\mathbb{Q}$, en tanto que las formas con coeficientes enteros forman una retícula (lattice) en dicho subespacio. Denotamos por $\mathrm{Vol}(V)$ al volumen del paralelepípedo formado por la base de vectores de esta retícula. De acuerdo a nuestra definición de volumen, es inmediato que $\mathrm{Vol}(V) \geq 1$.

Si $L(x) = \langle a, x \rangle$ es una forma lineal con coeficientes enteros y primos relativos, y $V$ es un hiperplano en $E$ (i.e., un subespacio de dimensión $m - 1$), definido por la ecuación $L(x) = 0$, tenemos que

$$\mathrm{Vol}(V) = \|a\| \qquad \text{y} \qquad \rho(\theta, V) = \frac{|L(\theta)|}{\mathrm{Vol}(V)}.$$

**Lema 4.4.** *Sean $U$ y $V \subset E$ subespacios racionales,* $\dim V = m - 1$, *$U \not\subseteq V$. Sea $W = U \cap V$. Entonces*

*(1)* $\mathrm{Vol}(W) \le \mathrm{Vol}(U)\mathrm{Vol}(V)$.

*(2)* $\mathrm{Vol}(W)\rho(\theta, W) \le \mathrm{Vol}(U)\mathrm{Vol}(V)(\rho(\theta, V) + \rho(\theta, U))$.

*Demostración.* Supongamos que $\langle a_1, x\rangle$, $\langle a_2, x\rangle$, $\dots$, $\langle a_r, x\rangle$ y $\langle b, x\rangle$ son bases de las retículas de formas enteras correspondientes a $U$ y a $V$, respectivamente. Es claro que $\mathrm{Vol}(W) \le \mathrm{Vol}(b, a_1, a_2, \dots, a_r)$. Entonces, por el Lema 4.2, tenemos que:

(35)
$$\mathrm{Vol}(b, a_1, a_2, \dots, a_r) = \|b_U\|\mathrm{Vol}(a_1, a_2, \dots, a_r) \le \|b\|\mathrm{Vol}(a_1, a_2, \dots, a_r),$$

donde el lado derecho de la desigualdad es $\mathrm{Vol}(U)\mathrm{Vol}(V)$.

Nótese que por (35), tenemos que

$$\mathrm{Vol}(W) \le \frac{\|b_U\|}{\|b\|}\mathrm{Vol}(U)\mathrm{Vol}(V),$$

y por lo tanto para probar la segunda desigualdad basta demostrar que

$$\rho(\theta, W)\|b_U\| \le \|b\|(\rho(\theta, U) + \rho(\theta, V)).$$

Si $\theta \in W$, entonces el lado izquierdo de la desigualdad es cero mientras que el lado derecho es no negativo. Entonces basta verificar el caso $\theta \in W^\perp$. Podemos suponer que $\|\theta\| = \|b\| = 1$. Entonces, al simplificar la desigualdad que queremos probar, obtenemos

$$\|b_U\| \le \|\theta_U^\perp\| + \|\theta_V^\perp\|.$$

Por un lado,

$$\dim(U \cap W^\perp) \ge \dim U + \dim W^\perp - m = \dim U - \dim W \ge 1,$$

además,

(36)
$$0 = \dim(W \cap W^\perp) = \dim(V \cap U \cap W^\perp) \ge \dim V + \dim(U \cap W^\perp) - m.$$

El lado izquierdo de la desigualdad (36) es cero mientras que el lado derecho es $\dim(U \cap W^\perp) - 1$. Esto concluye que $\dim(U \cap W^\perp) = 1$. Ahora, como $W \subset U$ y $U^\perp \subset W^\perp$, deducimos que $\theta_U = \theta - \theta_U^\perp \in U \cap W^\perp$ por las inclusiones anteriores y el hecho de que $\theta \in W^\perp$. Análogamente,

$b \in V^{\perp} \subset W^{\perp}$ y $b_U = b - b_U^{\perp} \in U \cap W^{\perp}$. Las inclusiones que hemos probado hasta ahora y el hecho de que $\dim(U \cap W^{\perp}) = 1$ implican que

$$\begin{aligned} \|\theta_U\| \ \|b_U\| &= |\langle \theta_U, b_U\rangle| = |\langle \theta_U, b\rangle| \\ &= |\langle \theta, b\rangle - \langle \theta_U^{\perp}, b\rangle| \\ &\leq |\langle \theta, b\rangle| + |\langle \theta_U^{\perp}, b\rangle|. \end{aligned} \tag{37}$$

Como $\|b\| = 1$, tenemos que

$$\theta_V^{\perp} = \langle \theta, b\rangle b \qquad \text{y} \qquad |\langle \theta, b\rangle| = \|\theta_V^{\perp}\|. \tag{38}$$

De las desigualdades (37) y (38), se deduce que

$$\|\theta_U\| \, \|b_U\| \leq \|\theta_V^{\perp}\| + \|\theta_U^{\perp}\| \, \|b_U^{\perp}\|. \tag{39}$$

Elevando al cuadrado la desigualdad (39) y sustituyendo $(\|\theta_U\| \, \|b_U\|)^2$, por $(\|b_U\|)^2 - (\|\theta_U^{\perp}\| \, \|b_U\|)^2$, (ya que $1 = \|\theta\|^2 = \|\theta_U\|^2 + \|\theta_U^{\perp}\|^2$) y usando el hecho de que $\|b_U^{\perp}\| \leq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|b_U\|^2 &\leq (\|\theta_U^{\perp}\| \, \|b_U\|)^2 + \left(\|\theta_V^{\perp}\| + \|\theta_U^{\perp}\| \, \|b_U^{\perp}\|\right)^2 \\ &= (\|\theta_U^{\perp}\| \, \|b_U\|)^2 + (\|\theta_U^{\perp}\| \, \|b_U^{\perp}\|)^2 + \|\theta_V^{\perp}\|^2 + 2\|\theta_U^{\perp}\| \, \|\theta_V^{\perp}\| \, \|b_U^{\perp}\| \\ &\leq \|\theta_U^{\perp}\|^2(\|b_U\|^2 + \|b_U^{\perp}\|^2) + \|\theta_V^{\perp}\|^2 + 2|\theta_U^{\perp}\| \, \|\theta_V^{\perp}\| \\ &= (|\theta_U^{\perp}\| + \|\theta_V^{\perp}\|)^2 \\ &= (\rho(\theta, V) + \rho(\theta, U))^2, \end{aligned}$$

lo que concluye nuestra demostración del lema. □

En lo que sigue, denotaremos por $\|L\|$ la norma del vector asociado a la forma $L$, es decir, la norma de $a$, si $L(x) = \langle a, x\rangle$.

## 4.3. El Teorema de Nesterenko

Enunciamos y demostramos a continuación el siguiente teorema.

**Teorema 4.5.** *Sean $\delta$, $N_0$, $c_1$, $c_2$, $\tau_1$, $\tau_2 \in \mathbb{R}^+$, tales que $0 \leq \tau_1 - \tau_2 < \delta$, $\sigma(t)$ es una función monótona creciente para $t \geq N_0$ que cumple*

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty, \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{\sigma(t+1)}{\sigma(t)} = 1.$$

*Sea* $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$ *y supongamos que para cualquier natural* $N \geq N_0$*, existe una forma lineal* $L_N(x)$ *con coeficientes enteros que satisface las siguientes condiciones:*

$$\|L_N\| \leq e^{\sigma(N)}, \qquad c_1 e^{-\tau_1\sigma(N)} \leq | L_N(\theta) | \leq c_2 e^{-\tau_2\sigma(N)}.$$

*Entonces, para cualquier entero* $r$ *que se localice dentro del intervalo* $0 \leq r < (\tau_1+1)/(\delta+1)$*, existe una constante* $\Upsilon_r > 0$ *tal que para cada subespacio racional* $V \subset \mathbb{R}^m$ *de dimensión* $r$ *se satisface la siguiente desigualdad*

$$\rho(\theta, V) \geq \Upsilon_r \mathrm{Vol}(V)^{-\frac{1+\tau_1}{1+\tau_1-r(1+\delta)}}.$$

Para el propósito de nuestro artículo, lo que nos interesa es el siguiente corolario.

**Corolario 4.6.** *Bajo las condiciones del teorema anterior, entre los números* $\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_m$ *hay al menos* $(\tau_1+1)/(1+\tau_1-\tau_2)$ *de ellos que son linealmente independientes sobre* $\mathbb{Q}$.

Demostraremos primero el Corolario 4.6 y después el Teorema 4.5.

*Demostración.* Sea $r$ el la mayor cantidad de números linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ entre los números $\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_m$. De manera natural, construimos $m-r$ formas linealmente independientes $M_j(x)$ con coeficientes racionales tal que $M_j(\theta) = 0$ para $j = 1,\ 2, \ldots,\ m-r$. Sea $V$ el subespacio racional definido igualando estas formas a cero. Entonces tenemos $\dim V = r$, y $\theta \in V$ y por tanto, $\rho(\theta, V) = 0$. Esto implica que $r \geq (1+\tau_1)/(1+\delta)$ por el Teorema 4.5. □

Ahora damos la demostración del Teorema 4.5.

*Demostración del Teorema 4.5.* Demostraremos el teorema por inducción sobre $r$. El caso $r = 0$ es trivial, pues el único subespacio de dimensión cero en $\mathbb{R}^m$ satisface $\mathrm{Vol}(V) = 1$ y $\rho(\theta, V) = \|\theta\|$. Tomando $\Upsilon_0 = \|\theta\|$, todo funciona bien.

Ahora supongamos que $1 < r < (1+\tau_1)/(1+\delta)$, y que todo subespacio de dimensión $r-1$ satisface la desigualdad que queremos demostrar. Fijamos un $\varepsilon$ tal que $0 < \varepsilon < (\delta-\tau_1+\tau_2)(\tau_1+1)^{-1}$. Tomamos un número natural $N_1 \geq N_0$ tal que $\sigma(t+1) \leq (1+\epsilon)\sigma(t)$, si $t \geq N_1$. Para $k \leq r$, definimos

$$\lambda_k = \frac{1+\tau_1}{1+\tau_1-k(1+\delta)}, \tag{40}$$

escogiendo dos constantes positivas $\mu$ y $\Upsilon_r$ que satisfagan las siguientes desigualdades

$$\mu e^{\tau_1\sigma(N_1)}\|L_{N_1}\| < 1, \qquad 2c_2\mu^{\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}} < \Upsilon_{r-1}, \qquad \Upsilon_r < c_1\mu. \tag{41}$$

Sea $V$ un subespacio racional de dimensión $r$ que contradice el teorema, es decir, para el cual

$$\rho(\theta, V) < \Upsilon_r \mathrm{Vol}(V)^{-\lambda_r}.$$

Sea $N$ el mayor entero tal que

$$\mathrm{Vol}(V)^{\lambda_r} \geq \mu e^{\tau_1\sigma(N)}\|L_N\|. \tag{42}$$

Es claro que dicho entero existe, pues el conjunto de números que satisfacen esta condición es no vacío ($N_1$ pertenece a este conjunto gracias a la elección de $\mu$), y es acotado por que $\sigma(t)$ tiende a infinito con $t$.

Denotamos por $V_1$ el subespacio de $\mathbb{R}^m$ definido por la ecuación $L_N(x) = 0$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(\theta, V_1) &= \frac{|L_N(\theta)|}{\|L_N\|} \geq c_1 e^{-\tau_1\sigma(N)}\|L_N\|^{-1} \\ &\geq c_1\mu \mathrm{Vol}(V)^{-\lambda_r} > \Upsilon_r \mathrm{Vol}(V)^{-\lambda_r} > \rho(\theta, V). \end{aligned}$$

Por el Lema 4.3, deducimos que $V \not\subseteq V_1$. Haciendo $W = V \cap V_1$ y utilizando el Lema 4.4, obtenemos que

$$\mathrm{Vol}(W)\rho(\theta, W) \leq \mathrm{Vol}(V)\|L_N\| 2\rho(\theta, V_1) = 2\mathrm{Vol}(V)|L_N(\theta)|,$$

y que

$$\mathrm{Vol}(W) \leq \mathrm{Vol}(V)\|L_N\|.$$

Notemos que $\lambda_{r-1} > 1$ y que además, por la hipótesis de inducción,

$$\mathrm{Vol}(W)\Upsilon_{r-1}\mathrm{Vol}(W)^{-\lambda_{r-1}} \leq \mathrm{Vol}(W)\rho(\theta, W).$$

Trataremos de llegar a una contradicción en el tamaño de $\Upsilon_{r-1}$. Para esto, despejamos esta constante de las desigualdades anteriores, quedando que:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{r-1} &\leq 2\mathrm{Vol}(V)|L_N(\theta)|\mathrm{Vol}(W)^{\lambda_{r-1}-1} \\ &\leq 2\mathrm{Vol}(V)^{\lambda_{r-1}}\|L_N\|^{\lambda_{r-1}-1}|L_N(\theta)|. \end{aligned} \tag{43}$$

Gracias a la elección de $N$, escribimos la desigualdad contraria a (42) para $N+1$

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(V)^{\lambda_r} &< \mu e^{\tau_1\sigma(N+1)\|L_{N+1}\|} \le \mu e^{(\tau_1+1)\sigma(N+1)} \\ &\le \mu e^{(\tau_1+1)(1+\epsilon)(\sigma(N))}. \end{aligned} \tag{44}$$

Despejando $\operatorname{Vol}(V)$ en (44) y sustituyendo en la desigualdad (43) para $\Upsilon_{r-1}$, obtenemos que

$$\Upsilon_{r-1} \le 2\mu^{\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}} c_2 e^{[\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}(\tau_1+1)(1+\epsilon)+\lambda_{r-1}-1-\tau_2]\sigma(N)}. \tag{45}$$

Comparando (45) con (41), notemos una contradicción si

$$\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}(\tau_1+1)(1+\epsilon)+\lambda_{r-1}-1-\tau_2 < 0. \tag{46}$$

Usando las fórmulas (40) para $\lambda_k$ observemos que la desigualdad (46) se sigue de

$$(1+\varepsilon)(\tau_1+1-r(1+\delta)) - (\tau_2+1-(r-1)(1+\delta)) < -1,$$

que es equivalente a

$$\varepsilon < \frac{\tau_2-(r-1)(1+\delta)}{\tau_1+1-r(1+\delta)} - 1 = \frac{\tau_2-\tau_1+\delta}{\tau_1+1-r(1+\delta)} < \frac{\tau_2-\tau_1+\delta}{\tau_1+1},$$

que es cierta por la manera de escoger $\varepsilon$. Esto concluye la demostración del Teorema 4.5. □

Finalmente, daremos la prueba del Teorema 3.1, que es una reformulación del Teorema 4.5.

*Demostración del Teorema 3.1.* Observemos que si tomamos

$$\sigma(t) = (\beta+\varepsilon)t, \qquad \tau_1 = \frac{\alpha_1-\varepsilon}{\beta+\varepsilon} \qquad \text{y} \qquad \tau_2 = \frac{\alpha_2+\varepsilon}{\beta+\varepsilon},$$

entonces las condiciones (i)–(iii) del enunciado del Teorema 3.1 implican que las condiciones del Corolario 4.6 se cumplen con $c_1 = c_2 = 1$ y $N_0$ grande para las formas $L_N(\theta) = \sum_{\ell=1}^{N} p_{\ell,N}\theta_\ell$ con $N \ge N_0$. Por lo tanto, la dimensión del espacio generado de los $\theta_i$ sobre $\mathbb{Q}$ es mayor o igual que $\dfrac{\tau_1+1}{1+\tau_1-\tau_2}$. Al hacer $\varepsilon \to 0$, se obtiene la desigualdad (33). □

Concluimos este trabajo sugeriendo la siguiente pregunta:

**Pregunta 1.** *¿ Que se puede decir sobre la estructura del $\mathbb{Z}$-módulo*

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{Z}\zeta(2n+1)?$$

**Agradecimientos**

Agradecemos al referee por sus valiosos comentarios.

Pedro Aceves Sánchez
*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas*
UMSNH
Morelia, Michoacán, México
shilambala@hotmail.com

Juan Pablo Maldonado López
*Instituto de Física y Matemáticas*
UMSNH
Morelia, Michoacán, México
pablo@ifm.umich.mx

Florian Luca
*Instituto de Matemáticas*
UNAM
Apartado Postal 61-3 (Xangari)
Morelia, Michoacán, México
fluca@matmor.unam.mx

Diego F. Núñez Sabbagh
*Facultad de Ciencias*
UNAM
Distrito Federal, México
dfns@ciencias.unam.mx

Ricardo Noel Pacheco Venegas
*Centro de Investigación en Matemáticas*
CIMAT
Guanajuato, México
rnoel4@yahoo.com.mx

# Referencias

[1] Ball K.; Rivoal T., *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs*, Inventiones Mathematicae **146** (2001), 193-207.

[2] Hermite C., *Sur la fonction exponentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris **77** (1873), 18-24; Tambien en Oeuvres de Charles Hermite, Vol. III, Gauthier-Villars, Paris, 1912, pp. 150–181.

[3] Niven I., *A simple proof that $\pi$ is irrational*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 509.

[4] Nesterenko Y. V., *On the linear independence of numbers*, Mosc. Univ. Math. Bull. **40** (1985). Traducción de *Vest. Mosk. Univ. Ser. I* no.1, 46-54.

[5] van der Poorten A. J., *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$*. An informal report*, Math. Intelligencer **1** (1979), 195–203.

[6] Zudilin V. V., *One of the numbers* $\zeta(5)$*,* $\zeta(7)$*,* $\zeta(9)$*,* $\zeta(11)$ *is irrational*, Uspekhi Mat. Nauk **56** (2001), 149–150. Traducción a inglés en Russian Math. Surveys **56** (2001), 774–776.