Morfismos, Vol. 6, No. 1, 2002, pp. 57-71

Gráficas con una cubierta maximal independiente y cotas para algunos invariantes*

Carlos E. Valencia-Oleta [1] Rafael H. Villarreal [2]

Resumen

Sea G una gráfica con n vértices la cual tiene una cubierta maximal independiente, β_0 el número de independencia de G y $\alpha_0 = n-\beta_0$. En este artículo se demuestra que si $\beta_0 > \alpha_0$, entonces G tiene al menos $n - 2\alpha_0$ vértices aislados. Como consecuencia se obtiene que si G no tiene vértices aislados, entonces $\beta_0 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. También se prueba que si q es el número de líneas y $e(G)$ es el número de conjuntos maximales independientes con β_0 vértices, entonces $q \leq \alpha_0^2$ y $e(G) \leq 2^{\alpha_0}$, respectivamente. Las gráficas que tienen una cubierta maximal independiente incluyen a las gráficas no mezcladas y a las gráficas críticas por líneas.

2000 Mathematics Subject Clasification: 13F55, 05C69, 05C40, 05C65.
Keywords and phrases: Gráfica, cubiertas, invariantes.

1 Introducción

Sea G una gráfica con vértices $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ un anillo de polinomios sobre un campo K. El ideal de líneas (resp. anillo de líneas) de la gráfica G es el ideal monomial:

$$I(G) = (\{x_i x_j \,|\, x_i \text{ es adjacente a } x_j\}) \subset R$$

*Este trabajo forma parte de la tesis doctoral del primer autor.

[1] Estudiante en el Programa de Doctorado del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV. Becario de CONACyT del proyecto 27931E, México.

[2] Apoyado por proyecto CONACyT 27931E.

(resp. $R/I(G)$), estos anillos han sido estudiados en [6, 7, 9, 10, 11]. Nosotros estamos interesados en estimar invariantes del anillo de líneas que pueden interpretarse como invariantes de la gráfica G. Nuestros resultados principales son cotas para la dimensión de $R/I(G)$, para la multiplicidad de $R/I(G)$, y para el número mínimo de generadores de $I(G)$; estos tres invariantes del anillo de líneas corresponden a tres invariantes de la gráfica G que son el número de independencia $\beta_0(G)$, el número de conjuntos maximales independientes con $\beta_0(G)$ elementos (que es precisamente el número de caras de dimensión máxima del complejo simplicial complementario de G), y el número de líneas de G, respectivamente. Las cotas que logramos son principalmente para la familia de gráficas que tienen una cubierta maximal independiente, esta familia contiene a las gráficas no mezcladas y a las gráficas críticas por líneas. Nosotros probaremos que algunos de nuestros resultados no admiten una generalización directa para hipergráficas.

Las referencias que usaremos para hipergráficas y gráficas son [1, 5], y para anillos de Stanley-Reisner e ideales de líneas usaremos [8, 10]. En particular aquí adoptaremos la terminología y notación usada en estas referencias.

2 Preliminares

Para facilitar la lectura empezaremos con algunas nociones básicas de gráficas e hipergráficas las cuales jugarán un papel importante en este artículo.

Sea G una gráfica (resp. hipergráfica) formada por el conjunto $V(G)$ de vértices y el conjunto $E(G)$ de líneas (resp. hiperlíneas).

Definición 2.1.1 Un conjunto A de vértices de G, se dice que es *independiente* si A no contiene ninguna línea de G (resp. hiperlínea). Además, un conjunto independiente será *maximal* si no está contenido propiamente en ningún conjunto independiente. El *número de independencia* de G, denotado por $\beta_0(G)$, se define como

$$\beta_0(G) = \max\{|M| \mid M \text{ es un conjunto independiente}\}.$$

Definición 2.1.2 Un conjunto A de vértices de G, se dice que es una *cubierta de vértices* si toda línea de G (resp. hiperlínea) contiene al menos a un vértice de A. Además, una cubierta de vértices será *minimal* si no contiene propiamente a ninguna cubierta de vértices. El *número de cubierta de vértices* de G, denotado por $\alpha_0(G)$, se define como

$$\alpha_0(G) = \min\{|M| \mid M \text{ es una cubierta de vértices}\}.$$

Los conceptos anteriores están relacionados pues A es una cubierta de vértices minimal de una hipergráfica G si y solo si $V(G) \setminus A$ es un conjunto maximal independiente. De donde se deduce que

$$n = \alpha_0(G) + \beta_0(G),$$

donde n es el número de vértices de G.

Definición 2.1.3 Una gráfica G es no mezclada si todos sus conjuntos maximales independientes tienen la misma cardinalidad.

Definición 2.1.4 Una gráfica G es crítica por líneas si

$$\alpha_0(G) > \alpha_0(G \setminus e)$$

para toda línea e de G.

Definición 2.1.5 Un vértice de la gráfica G (resp. hipergráfica), se llamará *aislado* si no pertenece a ninguna línea (resp. hiperlínea) o equivalentemente si pertenece a todo conjunto maximal independiente de G.

Definición 2.1.6 El *complejo simplicial complementario* $\Delta(G)$ de una gráfica G (resp. hipergráfica) está dado por

$$\Delta(G) = \{A \subseteq V(G) \mid A \text{ es un conjunto independiente de } G\}.$$

Notar que $\Delta(G)$ es el complejo de *Stanley-Reisner* del *ideal de líneas*:

$$I(G) = (\{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r} \mid \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}\} \text{ es una hiperlínea}\}) \subseteq R,$$

donde $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $R = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es un anillo de polinomios sobre un campo K, para simplificar la notación estamos identificando los vértices de G con las variables de R. Es usual denotar a $R/I(G)$, el anillo de Stanley-Reisner de $\Delta(G)$, por $K[\Delta(G)]$.

Una de las nociones centrales de este trabajo es la siguiente:

Definición 2.1.7 Una familia de conjuntos independientes $\mathcal{C} \subseteq \Delta(G)$ se dice que es una *cubierta maximal independiente* para la gráfica G (resp. hipergráfica) si $|M| = \beta_0(G)$ para todo M en $\mathcal{C}$ y $V(G) = \bigcup_{M \in \mathcal{C}} M$. Esto es equivalente a que todo vértice de G pertenezca a un conjunto maximal independiente.

Definición 2.1.8 Sea G una gráfica y H y L subconjuntos de $V(G)$, entonces H se dice $L-$ *aislado* si cualesquiera dos vértices uno en H y otro en L no pertenecen a una misma línea.

A continuación damos una serie de ejemplos que ilustran el concepto anterior.

1. Todo vértice $v \in V(G)$ satisface que $\{v\}$ es $\{v\}-$ aislado.
2. Un vértice $v \in V(G)$ es aislado si y solo si $\{v\}$ es $V(G)-$ aislado.
3. Sea v un vértice de G y L un conjunto independiente que lo contiene, entonces v es $L-$ aislado.
4. H es un conjunto independiente si y solo si H es $H-$ aislado, más aún el conjunto independiente H será maximal si y solo si no existe un subconjunto $\overline{H}$ de $V(G)$ tal que $H \subsetneq \overline{H}$ y H sea $\overline{H}-$ aislado.

3 Gráficas con cubiertas maximales independientes

En esta sección desarrollaremos los resultados principales del artículo.

Teorema 3.1.9 *Sea G una gráfica con n vértices. Si G tiene una cubierta maximal independiente con $\beta_0(G) > \alpha_0(G)$, entonces G tiene al menos $n - 2\alpha_0(G)$ vértices aislados.*

Demostración: La demostración consiste en construir un conjunto H de vértices aislados en $V(G)$ con $|H| \geq n - 2\alpha_0(G)$. Si $\alpha_0(G) = 0$, entonces $G = \overline{\mathcal{K}_n}$ es un conjunto de n vértices aislados y claramente se obtiene el resultado. Por lo tanto podemos suponer $\alpha_0(G) > 0$. Luego como G tiene una cubierta maximal independiente, entonces existen M y M' conjuntos maximales independientes distintos con $\beta_0(G)$ vértices.

Tomemos $H = M \cap M'$ y $N = M \cup M'$. Dado que $H \subset M$ (respectivamente M') y M es $M-$aislado (resp. M' es $M'-$aislado), obtenemos que H es $N-$aislado. Afirmamos que $|H| \geq n - 2\alpha_0(G)$. Recordemos que $n = \alpha_0(G) + \beta_0(G)$. Si $N = V(G)$, entonces $|H| = 2\beta_0(G) - n = n - 2\alpha_0(G)$. Mas aún, los elementos de H son vértices aislados en $V(G)$ ya que H es independiente, $M-$aislado y $M'-$aislado. Supongamos que $N \subsetneq V(G)$, entonces $|N| = n - s$ con $0 < s < \alpha_0(G)$ de donde $|H| = n - 2\alpha_0(G) + s > n - 2\alpha_0(G)$. Además existe un vértice v' en $V(G) \setminus N$ y, por hipótesis, un conjunto maximal independiente M'' que contiene a v' con $\beta_0(G)$ vértices.

Consideremos los conjuntos $H' = H \cap M''$ y $N' = N \cup M''$, los cuales satisfacen lo siguiente:

1. $H' \subseteq H$ y $N \subsetneq N'$.

   Ya que $H' = H \cap M'' \subseteq H \subseteq N \subsetneq N \cup \{v'\} \subseteq N'$.

2. $|N'| = n - s'$ con $0 \leq s' < s < \alpha_0(G)$ y $|H'| \geq n - 2\alpha_0(G) + s'$.

   Sea s' tal que $|N'| = n - s'$, entonces del punto anterior se desprende que $0 \leq s' < s < \alpha_0(G)$. Ahora tenemos que como $N' = N \cup (M''\backslash N)$ con $N \cap (M''\backslash N) = \emptyset$, entonces

   $$n - s' = |N'| = |N| + |M''\backslash N| = (n - s) + |M''\backslash N|$$

   y por lo tanto

   $$|M''\backslash N| = s - s'. \tag{1}$$

   Además tenemos la desigualdad

   $$|M'' \cap (N\backslash H)| \leq \alpha_0(G) - s, \tag{2}$$

   ya que $M'' \cap (N\backslash H)$ es un subconjunto de vértices de la subgráfica inducida $\langle N\backslash H\rangle$ de G que contiene el conjunto de vértices $N\backslash H$, la cual satisface que $\beta_0(\langle N\backslash H\rangle) \leq \alpha_0(G) - s$, ya que de lo contrario se tendría que existe un conjunto independiente $T \subset N \setminus H$ con $|T| = \alpha_0(G) - s + 1$, y entonces $T \cup H$ seria un conjunto independiente con al menos $\beta_0(G) + 1$ vértices ya que T y H son conjuntos independientes y H es $T-$aislado, lo cual es imposible.

   Por último tenemos la descomposición

   $$M'' = (M'' \cap H) \cup (M'' \cap (N\backslash H)) \cup (M''\backslash N),$$

con $M''\cap H$, $M''\cap(N\backslash H)$ y $M''\backslash N$ mutuamente disjuntos. Usando (1) y (2) tenemos

$$\begin{aligned}\beta_0(G) = |M''| &= |M''\cap H| + |M''\cap(N\backslash H)| + |M''\backslash N| \\ &\leq |H'| + (\alpha_0(G) - s) + (s - s')\end{aligned}$$

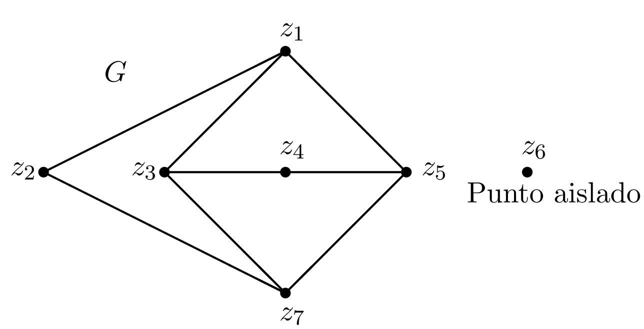
y por lo tanto $|H'| \geq n - 2\alpha_0(G) + s' \geq n - 2\alpha_0(G)$.

3. H' es $N'-$ aislado.

   Ya que si $h \in H'$, entonces $h \in H$ y $h \in M''$. Luego h es $N-$ aislado y h es $M''-$ aislado y por lo tanto h es $N' = N \cup M''-$ aislado para todo $h \in H'$.

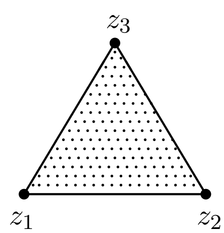
Nuevamente si $N' = V(G)$, entonces H' es un conjunto de vértices aislados en $V(G)$ y terminamos la demostración; si no es así, tenemos por hipótesis, que existe M''' conjunto maximal independiente con $\beta_0(G)$ vértices el cual satisface que $M''' \not\subset N'$ y repetimos el proceso anterior hasta que obtengamos $N' = V(G)$ (esto siempre es posible ya que $V(G)$ es finito y $N \subset N'$). Al finalizar obtenemos un conjunto H el cual contiene al menos $n-2\alpha_0(G)$ vértices aislados con lo cual queda demostrado el teorema. □

Ejemplo 3.1.10 La siguiente gráfica es una gráfica mezclada (ya que $\{z_2, z_4, z_6\}$ y $\{z_1, z_4, z_6, z_7\}$ son dos conjuntos maximales independientes con diferente cardinalidad) con una cubierta maximal independiente $\mathcal{C} = \{\{z_1, z_4, z_6, z_7\}, \{z_2, z_3, z_5, z_6\}\}$. En la Sección 4 veremos que toda gráfica no mezclada o crítica por líneas tiene una cubierta maximal independiente; sin embargo, el recíproco no es válido como lo muestra este ejemplo. Notar que $\beta_0(G) = 4 = 7 - 3 > \lfloor \frac{7}{2} \rfloor$ y todo vértice pertenece a un conjunto maximal independiente con 4 vértices.



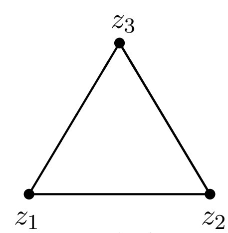
Ejemplo 3.1.11 La hipergráfica H con vértices $V(H) = \{z_1, z_2, z_3\}$ e hiperlíneas $E(H) = \{\{z_1, z_2, z_3\}\}$ tiene una cubierta maximal independiente y satisface que $\beta_0(H) = 2 > 1 = \alpha_0(H)$. Notar que H no tiene vértices aislados, lo cual muestra que el Teorema 3.1.9 no se satisface para hipergráficas. Las caretas del complejo simplicial complementario de H son $\{z_1, z_2\}$, $\{z_1, z_3\}$ y $\{z_2, z_3\}$.

hipergráfica



H

complejo simplicial



$\Delta(H)$

El siguiente corolario fue obtenido por Erdös and Gallai [3] bajo las hipótesis de que la gráfica G es crítica por líneas y sin vértices aislados; véanse también los comentarios en [1, p. 59].

Corolario 3.1.12 *Sea G una gráfica con n vértices y sin vértices aislados. Si K es un campo y G tiene una cubierta maximal independiente, entonces*

$$\dim K[\Delta(G)] \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Demostración: Notar que $\beta_0(G) = \dim K[\Delta(G)]$, ver [8]. Procederemos por contradicción. Suponiendo que $\beta_0(G) > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, obtenemos que $\alpha_0(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; entonces aplicando el Teorema 3.1.9 tenemos que G tendría $n - 2\alpha_0(G) = n - \alpha_0(G) - \alpha_0(G) > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 0$ vértices aislados, lo cual es una contradicción a la hipótesis de que G no tiene vértices aislados y por lo tanto tenemos que $\beta_0(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. $\Box$

Proposición 3.1.13 *Sea G una gráfica con n vértices y q líneas. Si G tiene una cubierta maximal independiente, entonces $q \leq \alpha_0(G)^2$.*

Demostración: Para contar el número de líneas de G fijaremos una cubierta de vértices minimal M con $\alpha_0(G)$ vértices. Claramente contar las líneas de G es equivalente a contar las líneas incidentes al conjunto

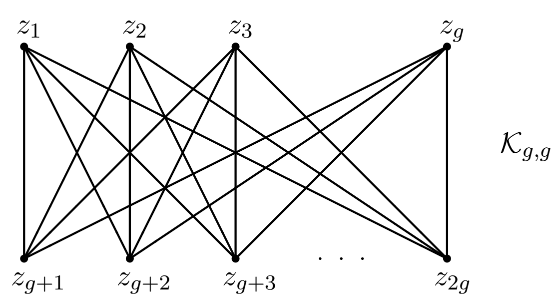
M. Además, cada vértice v_0 de M no puede tener más de $\alpha_0(G)$ vértices adyacentes ya que de lo contrario v_0 no pertenecería a ningún conjunto maximal independiente con $\beta_0(G)$ vértices, lo cual es una contradicción a la supuesto y por lo tanto el número de líneas q de G es menor o igual que $\alpha_0(G)^2$. $\Box$

Nota 3.1.14 La cota de la Proposición 3.1.13 puede ser comparada con la cota

$$q \leq (\alpha_0(G) + \alpha_0(G)^2)/2$$

dada en [9, remark 4.12(c)] (resp. [4]) para el número de líneas en una gráfica Cohen-Macaulay (resp. crítica por líneas). Véase también [1, p. 62].

Ejemplo 3.1.15 La siguiente figura muestra la gráfica bipartita completa $\mathcal{K}_{g,g}$ la cual es no mezclada, tiene $\alpha_0(G)^2 = g^2$ líneas y una cubierta maximal independiente dada por $\{z_1, \ldots, z_g\}$ y $\{z_{g+1}, \ldots, z_{2g}\}$. Por tanto este ejemplo muestra que la cota de la Proposición 3.1.13 es óptima.



Definición 3.1.16 Sea A un conjunto de vértices de una gráfica G. Al conjunto de vértices que son adyacentes al menos a un vértice de A, se le llamará la *vecindad* de A y se denotará por $N(A)$.

Sea G una hipergráfica y K un campo. La *multiplicidad* $e(G)$ de G se define como la multiplicidad del anillo $K[\Delta(G)]$. Por [8] la multiplicidad $e(G)$ is igual al número de conjuntos independientes de G con $\beta_0(G)$ vértices.

Proposición 3.1.17 *Si G es una gráfica con n vértices y con una cubierta maximal independiente $\mathcal{C}$, entonces*

$$\left\lceil \frac{n}{\beta_0(G)} \right\rceil \leq e(G).$$

Demostración: Sean $A_1, \ldots, A_r$ los conjuntos de la cubierta $\mathcal{C}$. Por la igualdad $V(G) = A_1 \cup \cdots \cup A_r$, obtenemos $n = |V(G)| \leq r\beta_0(G)$, lo cual prueba esta cota inferior. $\Box$

Teorema 3.1.18 *Si G es una gráfica, entonces $e(G) \leq 2^{\alpha_0(G)}$.*

Demostración: Primeramente, sin perder generalidad, podemos suponer que la gráfica G no tiene vértices aislados, ya que si esta los tuviera, entonces el número de conjuntos maximales independientes de la gráfica G y la gráfica $G' = G\backslash\{\text{vértices aislados}\}$ seria el mismo. Como $V(G)\backslash C$ es un conjunto maximal independiente si y solo si C es una cubierta mínima de vértices, entonces el contar los conjuntos maximales independientes con $\beta_0(G)$ vértices es equivalente a contar a las cubiertas de vértices minimales con $\alpha_0(G)$ vértices. Por otro lado sea

$$\mathcal{C} = \{C|\, C \text{ es una cubierta de vértices de } G \text{ con } \alpha_0(G) \text{ vértices}\}$$

y C una cubierta de vértices con $\alpha_0(G)$ vértices. Para $0 \leq i \leq \alpha_0(G)$, consideremos el conjunto

$$\mathcal{C}_i = \{C'|\, C' \in \mathcal{C} \text{ y } |C \cap C'| = i\}.$$

Afirmamos que se tiene la siguiente desigualdad

$$|\mathcal{C}_i| \leq \binom{\alpha_0(G)}{i} \qquad (\forall\, i \geq 0). \tag{3}$$

Vamos a demostrar que solo puede existir una cubierta de vértices con $\alpha_0(G)$ vértices que intersecte a C en un conjunto dado. En efecto sean C' y C'' dos cubiertas en $\mathcal{C}_i$ tal que $C \cap C' = C \cap C''$. Usando que $C \cap C' = C \cap C''$ obtenemos:

$$N(C \setminus C') = N(C \setminus C''). \tag{4}$$

Como C' y C'' son cubiertas de vértices de G tenemos:

$$N(C \setminus C') \cup (C \cap C') \subset C' \;\text{ y }\; N(C \setminus C'') \cup (C \cap C'') \subset C''.$$

Observar que $N(C \setminus C') \cup (C \cap C')$ y $N(C \setminus C'') \cup (C \cap C'')$ son cubiertas de vértices de G, pues C es una cubierta de vértices de G. Usando la minimalidad de C' y C'' obtenemos las igualdades:

$$N(C \setminus C') \cup (C \cap C') = C' \quad \text{y} \quad N(C \setminus C'') \cup (C \cap C'') = C'',$$

las cuales junto con la Eq. (4) nos permiten concluir que $C' = C''$. Por lo tanto, puesto que sólo hay $\binom{\alpha_0(G)}{i}$ conjuntos con i vértices en C concluimos que la desigualdad (3) se cumple. Luego

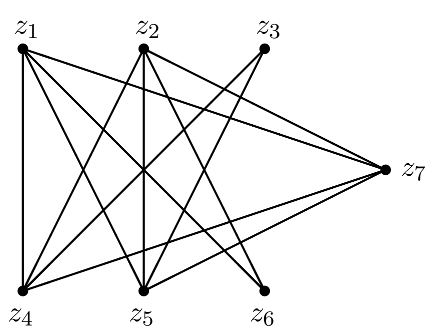
$$e_0(G) = |\mathcal{C}| = \sum_{i=0}^{\alpha_0(G)} |\mathcal{C}_i| \leq \sum_{i=0}^{\alpha_0(G)} \binom{\alpha_0(G)}{i} = 2^{\alpha_0(G)}$$

y por lo tanto $e_0(G) \leq 2^{\alpha_0(G)}$. $\Box$

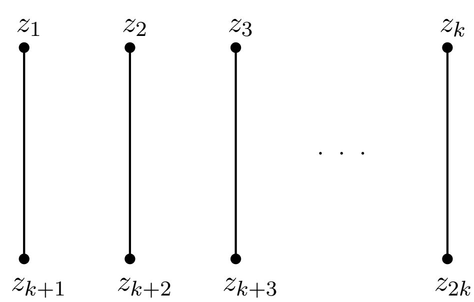
Ejemplo 3.1.19 Para demostrar que la cota de la Proposición 3.1.17 es óptima construiremos una familia de gráficas que la realicen. Sean $n \geq m$ enteros positivos con $n = sm+r$ donde $s = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$. Tomemos como base a la gráfica multipartita completa $\mathcal{K}_{m,\ldots,m,r}$, escojamos un vértice z_i de cada uno de las s gráficas discretas $\overline{\mathcal{K}_m}$ y quitémosle a $\mathcal{K}_{m,\ldots,m,r}$ las líneas que unen los vértices que escogimos consigo mismos y las líneas que unen la gráfica $\overline{\mathcal{K}_r}$. La gráfica resultante se denotará por $\mathcal{K}_{\{n\setminus m\}}$, la cual satisface

$$\beta_0(\mathcal{K}_{\{n\setminus m\}}) = m \quad \text{y} \quad e(\mathcal{K}_{\{n\setminus m\}}) = \left\lceil \frac{n}{\beta_0(\mathcal{K}_{\{n\setminus m\}})} \right\rceil = s+1.$$

La siguiente figura muestra el caso cuando $n = 7$ y $m = 3$.



Ejemplo 3.1.20 Para demostrar que la cota del Teorema 3.1.18 es óptima considere la gráfica G que es unión disjunta de k gráficas del tipo $\mathcal{K}_2$ como se muestra en la siguiente figura. Notar que G satisface $\alpha_0(G) = \beta_0(G) = k$ y $e(G) = 2^{\alpha_0(G)}$.



4 Gráficas no mezcladas y críticas por líneas

4.1 Gráficas no mezcladas

Lema 4.1.1 *Toda gráfica G no mezclada tiene una cubierta maximal independiente.*

Demostración: Se sigue inmediatamente del hecho de que si $v \in V(G)$, entonces v pertenece a un conjunto maximal independiente M y como G es no mezclada, entonces M tiene $\beta_0(G)$ vértices y por lo tanto G tiene una cubierta maximal independiente. $\Box$

Corolario 4.1.2 *Sea G una gráfica no mezclada con n vértices. Si $\beta_0(G) > \alpha_0(G)$, entonces G tiene al menos $n - 2\alpha_0(G)$ vértices aislados.*

Demostración: Se sigue del Lema 4.1.1 y del Teorema 3.1.9. $\Box$

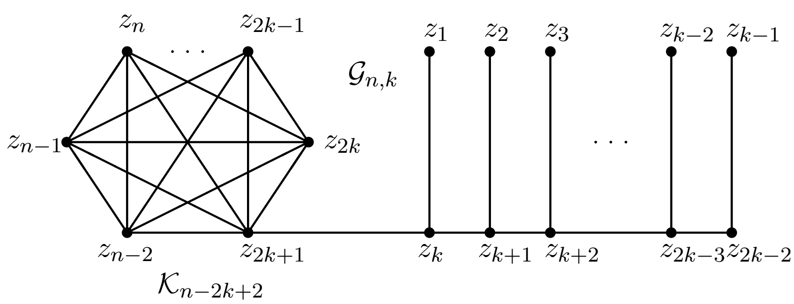
Corolario 4.1.3 *Sea G una gráfica sin vértices aislados. Si G es no mezclada y tiene n vértices, entonces $\beta_0(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Demostración: Se sigue del Lema 4.1.1 y del Corolario 3.1.12. $\Box$

Corolario 4.1.4 *Sea G una gráfica Cohen-Macaulay sin vértices aislados con n vértices, entonces $\beta_0(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Demostración: Usando [2, Corolario 5.1.5] tenemos que toda gráfica Cohen-Macaulay es no mezclada, por lo tanto aplicando el Corolario 4.1.3 obtenemos el resultado.□

Ejemplo 4.1.5 Sean n un entero positivo y $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Entonces la gráfica $\mathcal{G}_{n,k}$:



es una gráfica Cohen-Macaulay sin vértices aislados con $\beta_0(G) = k$. Esta familia de gráficas demuestra que las cotas de los resultados anteriores son óptimas.

4.2 Gráficas críticas por líneas.

Lema 4.2.1 *Sea G una gráfica crítica por líneas con número de independencia $\beta_0(G)$, entonces todo vértice de G pertenece a un conjunto maximal independiente con $\beta_0(G)$ vértices.*

Demostración: Sea v un vértice de G, luego tenemos dos casos: que v sea aislado y que no lo sea. Si v no es aislado entonces al menos existe una línea $\{u, v\} = x \in E(G)$. Como G es crítica por líneas, entonces $\beta_0(G \setminus x) = \beta_0(G) + 1$ de donde tenemos que existe M maximal independiente de $G \setminus x$ con $\beta_0(G) + 1$ vértices y además $u, v \in M$; de lo anterior se desprende que $M \setminus u$ es un conjunto maximal independiente de G con $\beta_0(G)$ vértices que contiene a v como se quería. Si v es aislado, entonces pertenece a todo conjunto maximal independiente y por lo tanto también se obtiene el resultado. □

Corolario 4.2.2 ([3]) *Si G es una gráfica crítica por líneas con n vértices y $\beta_0(G) > \alpha_0(G)$, entonces G tiene al menos $n - 2\alpha_0(G)$ vértices aislados.*

Demostración: Se sigue del Lema 4.2.1 y del Teorema 3.1.9. □

Corolario 4.2.3 ([3]) *Sea G una gráfica sin vértices aislados. Si G es crítica por líneas con n vértices, entonces $\beta_0(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Demostración: Se sigue del Lema 4.2.1 y del Corolario 3.1.12. □

Lema 4.2.4 ([1]) *Toda gráfica G contiene una subgráfica G', tal que G' es crítica por líneas con $\beta_0(G) = \beta_0(G')$ y $V(G) = V(G')$.*

Demostración: Construiremos a la gráfica G', usando el siguiente algoritmo:

1. Tomemos a $G' = G$.
2. Tomemos una línea $\{x, y\} \in E(G')$ de G'.
3. Si $\beta_0(G' \backslash \{x, y\}) = \beta_0(G')$, entonces hacemos $G' = G' \backslash \{x, y\}$.
4. Si $\beta_0(G' \backslash \{x, y\}) > \beta_0(G')$, entonces repetimos el paso 2 hasta que no exista ninguna línea $\{x, y\}$ en G' con $\beta_0(G' \backslash \{x, y\}) = \beta_0(G')$.

El algoritmo es finito ya que la gráfica sólo contiene un número finito de líneas. La gráfica G' obtenida por este algoritmo es una gráfica crítica por líneas por la forma en que se construyó y claramente $\beta_0(G') = \beta_0(G)$. □

5 Comentarios finales

Esencialmente se ha demostrado que si estamos interesados en gráficas conexas con una cubierta maximal independiente, entonces basta concentrarnos en las gráficas que satisfacen $\beta_0(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Lo anterior también es válido para gráficas Cohen-Macaulay ya que toda gráfica Cohen-Macaulay es no mezclada y toda gráfica no mezclada tiene una cubierta maximal independiente.

Nota 5.1.5 Toda gráfica G con $\beta_0(G) \leq 2$ contiene una subgrafica G' no mezclada con $\beta_0(G) = \beta_0(G')$ y $V(G) = V(G')$, más aún podemos escoger a G' que sea Cohen-Macaulay. La existencia de dicha subgráfica se puede demostrar usando esencialmente el Lema 4.2.4 ya que toda gráfica crítica por líneas G' con $\beta_0(G') \leq 2$ es no mezclada.

Lema 5.1.6 *Toda gráfica bipartita crítica por líneas es no mezclada.*

Demostración: Se sigue inmediatamente de [5, Corolary 10.7(b)].□

Las observaciones anteriores y el análisis de varios ejemplos nos llevan a conjeturar lo siguiente:

Conjetura 5.1.7 *Toda gráfica G con a lo más ocho vértices tiene una subgráfica G' no mezclada con $\beta_0(G) = \beta_0(G')$ y $V(G) = V(G')$.*

Conjetura 5.1.8 *Toda gráfica G con a lo más ocho vértices tiene una subgráfica G' Cohen-Macaulay con $\beta_0(G) = \beta_0(G')$ y $V(G) = V(G')$.*

Notar que estas dos conjeturas no son válidas en general ya que el polígono con 9 lados es una gráfica crítica por líneas, mezclada y por lo tanto ninguna de las conjeturas anteriores es válida en general.

Carlos E. Valencia-Oleta
Departamento de Matemáticas,
CINVESTAV-IPN,
A. Postal 14–740,
07000 México, D.F., MEXICO.
cvalenci@math.cinvestav.mx

Rafael H. Villarreal
Departamento de Matemáticas,
CINVESTAV-IPN,
A. Postal 14–740,
07000 México, D.F., MEXICO.
vila@math.cinvestav.mx

Referencias

[1] Berge, C., Hypergraphs Combinatorics of Finite Sets, Mathematical Library **45**, North-Holland, 1989.

[2] Bruns, W.; Herzog, J., Cohen-Macaulay Rings, Cambridge University Press, Cambridge, Revised Edition, 1997.

[3] Erdös, P.; Gallai, T., *On the minimal number of vértices representing the edges of a graph*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **6** (1961), 181–203.

[4] Erdös, P.; Hajnal, A.; Moon, J. W., *A problem in graph theory*, Amer. Math. Monthly, **71** (1964), 1107–1110.

[5] Harary, F., Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.

[6] Simis, A.; Vasconcelos, W.V.; Villarreal, R., *On the ideal theory of graphs*, J. Algebra, **167** (1994), 389–416.

[7] Sousa, T., Grafos Cohen-Macaulay, M.S. Thesis, Instituto Superior Técnico, Lisbon, 2001.

[8] Stanley, R., Combinatorics and Commutative Algebra, Birkhäuser Boston, 2nd ed., 1996.

[9] Villarreal, R., *Cohen-Macaulay graphs*, Manuscripta Math. **66** (1990), 277–293.

[10] Villarreal, R., Monomial Algebras, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **238**, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

[11] Watkins, A., Hilbert Functions of Face Rings Arising From Graphs, M.S. Thesis, Rutgers University, 1992.