Morfismos, Vol. 5, No. 2, 2001, pp. 51–61

Sobre la estrechez de un espacio topológico *

Alejandro Ramírez Páramo [1]

Resumen

En este trabajo se muestran algunos resultados sobre la estrechez en la clase $\mathcal{C}_2$ de los espacios Hausdorff y compactos; en particular, se demuestran las igualdades $t(X) = h\pi\chi(X)$ y $t(\prod\{X_s : s \in S\}) = |S| \cdot sup\{t(X_s) : s \in S\}$, cuando X y X_s pertenecen a $\mathcal{C}_2$ para toda $s \in S$.

2000 Mathematics Subject Classification: 54A25.
Keywords and phrases: Estrechez, clase $\mathcal{C}_2$.

1 Introducción

En este trabajo se presentan algunos resultados conocidos y otros (posiblemente) no tan conocidos sobre la función cardinal estrechez; cabe señalar que los resultados proposición 3.2, el corolario 3.4 y el lema 4.10, no se encuentran en la bibliografía consultada por el autor.

Una función cardinal topológica (llamada, también, invariante cardinal topológico), es una función ϕ que va de la clase de los espacios topológicos (algunas veces de una subclase de éstos) a la clase de los números cardinales infinitos de tal forma que $\phi(X) = \phi(Y)$ para espacios X y Y homeomorfos (para un estudio detallado sobre funciones cardinales recomendamos al lector [3] y [4]).

Una cuestión inmediata sobre funciones cardinales es cómo determinar el cardinal que debe asociarse al espacio X; lo cual, en muchas

*El contenido de este trabajo representa parte de la tesis de grado presentada por el autor dentro del programa de maestría de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla.

[1]Estudiante inscrito en el programa de doctorado de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla.

ocasiones no es sencillo de responder. De aquí la necesidad de tener resultados que permitan obtener cotas para las funciones cardinales. En la tercera sección de este trabajo, se relaciona el concepto de conjunto $\kappa-$cerrado con la estrechez para abordar el problema anterior. Se muestra además, en esta sección, que las funciones t (estrechez) y $h\pi\chi$ ($\pi-$caracter hereditario) satisfacen la desigualdad $t(X) \leq h\pi\chi(X)$ para cualquier espacio topológico. De manera natural surge la pregunta: ¿para qué espacios X se da la igualdad $t(X) \leq h\pi\chi(X)$?; este problema es abordado en la cuarta sección; en esta misma se muestra que si $\{X_s : s \in S\}$ es una familia de espacios topológicos, tales que cada X_s es Hausdorff y compacto, entonces $t(\prod\{X_s : s \in S\}) = |S| \cdot t_S(\prod\{X_s : s \in S\})$, en donde $t_S(\prod\{X_s : s \in S\}) = sup\{t(X_s) : s \in S\}$.

2 Notaciones y definiciones

Aquí, ω representa ambos, el primer ordinal y cardinal infinito, además, κ denota un cardinal el cual siempre será $\geq \omega$ y κ^+ es el sucesor de κ. Usamos $\mathcal{P}(X)$ para denotar al conjunto potencia de X y $|X|$ para la cardinalidad de X. Si S es un conjunto y κ un cardinal, $[S]^\kappa$ denota la colección de subconjuntos de S con cardinalidad κ; $[S]^{\leq\kappa}$ se usa para la colección de subconjuntos de S con cardinalidad $\leq \kappa$ y $[S]^{<\kappa}$ denotará a la colección de subconjuntos de S con cardinalidad menor que κ.

Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y A un subconjunto de X. La clausura de A en X se denota $cl_X(A)$. Con $\mathcal{V}_x$ denotamos al conjunto de abiertos en X que contienen a x. Por otro lado, x es punto de acumulación completo de A, si para todo $U \in \mathcal{V}_x$, se cumple que $|A| = |A \cap U|$. Es posible demostrar que en un espacio Hausdorff y compacto, cualquier conjunto infinito tiene un punto de acumulación completo. Se usa $\mathcal{C}_2$ para designar a la clase de los espacios Hausdorff y compactos. Si $\{X_s : s \in S\}$ es una familia, no vacía, de espacios topológicos, denotamos con X su producto cartesiano con la topología producto. Si $S_0 \subseteq S$ es no vacío, X_{S_0} denota al espacio producto $\prod\{X_s : s \in S_0\}$. Además, bajo estas condiciones, $pr_{S_0} : X \to X_{S_0}$ es la función proyección.

Las funciones cardinales, estrechez y $\pi-$caracter se definen a través de los siguientes números cardinales: la estrechez y el $\pi-$caracter del punto $x \in X$ son, respectivamente: $t(x, X) = \min\{\beta : \forall C \subseteq X$ con $x \in cl_X C$, existe $B \subseteq C$ tal que $|B| \leq \beta$ y $x \in cl_X(B)\}$ y $\pi\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es $\pi-$base local de $x\}$ (donde $\mathcal{V}$ es una $\pi-$base local de

$x \in X$ si cada $V \in \mathcal{V}$ es abierto no vacío en X y para cada $U \in \mathcal{V}_x$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$). La estrechez y el $\pi-$caracter del espacio X se definen, respectivamente, de la siguiente manera: $t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\} + \omega$ y $\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(x, X) : x \in X\} + \omega$. Otra función cardinal que usaremos es la amplitud cuya definición es como sigue $s(X) = min\{|A| : A \text{ es discreto en } X\} + \omega$.

Se dice que una función cardinal ϕ es monótona si para todo Y subespacio de X, $\phi(Y) \leq \phi(X)$. No es difícil demostrar que una función cardinal ϕ es monótona si $h\phi(X) = \sup\{\phi(Y) : Y \text{ es subespacio de } X\} = \phi(X)$.

3 La estrechez

Un concepto de gran utilidad al trabajar con la estrechez es la $\kappa-$clausura de un conjuto: Sea X un espacio topológico, A un subconjunto de X y κ un número cardinal; la $\kappa-$clausura de A es el conjunto $[A]_\kappa = \bigcup\{cl_X(B) : B \subseteq A \text{ y } |B| \leq \kappa\}$.

Un conjunto A con la propiedad de que para todo $B \subseteq A$ con $|B| \leq \kappa$, $cl_X(B) \subseteq A$ se dice que es un conjunto $\kappa-$cerrado.

Proposición 3.1 *Sea X un espacio topológico y κ un número cardinal. Para todo $C \in \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$, C es $\kappa-$cerrado si y sólo si $C = [C]_\kappa$.*

Demostración: La necesidad es inmediata. Para demostrar la suficiencia, sea $C \subseteq X$ no vacío, y sea $A \subseteq [C]_\kappa$ con $|A| \leq \kappa$; por demostrar que $cl_X(A) \subseteq [C]_\kappa$. Para cada $x \in A$, existe $B_x \subseteq C$ tal que $x \in cl_X(B_x)$ y $|B_x| \leq \kappa$. Sea $B = \bigcup_{x\in A} B_x$, entonces $B \subseteq C$ y $|B| \leq \sum_{x\in A} |B_x| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$, de donde $cl_X(B)$ es uno de los uniendos en $[C]_\kappa$. Por otra parte, dado que $A \subseteq \bigcup_{x\in A} cl_X(B_x) \subseteq cl_X(B)$ se tiene que $cl_X(A) \subseteq cl_X(B) \subseteq [C]_\kappa$; por tanto $cl_X(A) \subseteq [C]_\kappa$. Así $[C]_\kappa$ es $\kappa-$cerrado en X. $\square$

Proposición 3.2 *Sea $f : X \to Y$ una función cerrada y κ un número cardinal. Si $C \in \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$ es $\kappa-$cerrado en X entonces, $f(C)$ es $\kappa-$cerrado en Y.*

Demostración: Sea $C \in \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$ $\kappa-$cerrado en X y $A \subseteq f(C)$, no vacío, tal que $|A| \leq \kappa$. Queremos demostrar que $cl_Y(A) \subseteq f(C)$. Por cada $a \in A$, elija $x_a \in C$ tal que $f(x_a) = a$; sea C' el conjunto formado por tales puntos. Entonces $C' \subseteq C$ tal que $|C'| \leq \kappa$; así, puesto que C

es $\kappa-$cerrado en X, $cl_X(C') \subseteq C$; de donde $f(cl_X(C')) \subseteq f(C)$. Claramente $A \subseteq f(cl_X(C'))$; luego, $cl_Y(A) \subseteq cl_Y f(cl_X(C')) = f(cl_X(C'))$ (pues f es cerrada). Por tanto $cl_Y(A) \subseteq f(cl_X(C))$. Por tanto $f(C)$ es $\kappa-$cerrado en Y. $\square$

El siguiente resultado es de gran utilidad, permite acotar por arriba a la estrechez de un espacio.

Lema 3.3 *Sea X un espacio topológico arbitrario y κ un cardinal. Entonces $t(X) \leq \kappa$ si y sólo si para todo $C \in \mathcal{P}(X) \backslash \{\emptyset\}$, $cl_X(C) = [C]_\kappa$.*

Demostración: Para probar la necesidad, sea $C \in \mathcal{P}(X) \backslash \{\emptyset\}$. Puesto que $[C]_\kappa \subseteq cl_X(C)$; es suficiente con demostrar que $cl_X(C) \subseteq [C]_\kappa$. Si $x \in cl_X(C)$, existe $B \subseteq C$ tal que $|B| \leq t(x, X) \leq t(X) \leq \kappa$ y $x \in cl_X(B) \subseteq [C]_\kappa$. Por tanto $cl_X(C) \subseteq [C]_\kappa$.

Ahora probaremos la suficiencia. Sea $C \subseteq X$ y $x \in cl_X(C)$, por hipótesis, $cl_X(C) = [C]_\kappa$, luego, existe $B \subseteq C$ tal que $x \in cl_X(B)$ y $|B| \leq \kappa$. Por tanto $t(x, X) \leq \kappa$, dado que $x \in X$ fue arbitrario, se sigue que $t(X) \leq \kappa$. $\square$

Corolario 3.4 *$t(X) \leq \kappa$ si y sólo si $[C]_\kappa$ es cerrado en X para todo $C \in \mathcal{P}(X) \backslash \{\emptyset\}$. (Equivalentemente, $t(X) \leq \kappa$ si y sólo si todo subconjunto $\kappa-$cerrado en X es cerrado en X.)*

Teorema 3.5 *$t(X)$ es igual al menor cardinal κ con la propiedad de que para cualquier subconjunto no cerrado C de X existe $B \subseteq C$ tal que $|B| \leq \kappa$ y $cl_X(B) \backslash C \neq \emptyset$.*

Demostración: Sea $\beta = t(X)$. Veamos primero que $\kappa \leq \beta$. Sea $C \subseteq X$ no cerrado, entonces podemos tomar $x \in cl_X(C) \backslash C$; luego, existe $B \subseteq C$ tal que $x \in cl_X(B)$ y $|B| \leq t(x, X) \leq \beta$. Evidentemente $cl_X(B) \backslash C \neq \emptyset$. De aquí que β satisface la misma propiedad que κ; por tanto $\kappa \leq \beta$.

Para verificar que $\beta \leq \kappa$, suponemos que $[C]_\kappa$ no es cerrado, por hipótesis existe $A \subseteq [C]_\kappa$ tal que $|A| \leq \kappa$ y $cl_X(A) \backslash [C]_\kappa \neq \emptyset$, lo cual contradice la proposición 3.1. Por tanto $[C]_\kappa$ es cerrado; así $\beta \leq \kappa$. $\square$

La estrechez es una función monótona y se preserva bajo mapeos cerrados.

Proposición 3.6 (i) *La función t es monótona.*
(ii) *Si $f : X \to Y$ es continua y cerrada de X sobre Y, entonces $t(Y) \leq t(X)$.*

Demostración: (i) Observe que si C es un subconjunto del subespacio Y de X, y $\kappa = t(X)$, entonces $[C]^Y_\kappa = Y \cap [C]_\kappa$; donde $[C]^Y_\kappa$ es la $\kappa-$clausura de C en Y.

(ii) Sea $F \in \mathcal{P}(Y)\backslash\{\emptyset\}$ y $\kappa = t(X)$. Demostraremos que $[F]_\kappa$ es cerrado en Y. Denotemos por E al conjunto $[F]_\kappa$.

Afirmación: $f^{-1}(E) = [f^{-1}(E)]_\kappa$. En efecto, como $\kappa = t(X)$, del lema 3.3 se tiene que $[f^{-1}(E)]_\kappa = cl_X(f^{-1}(E))$, de donde, trivialmente $f^{-1}(E) \subseteq [f^{-1}(E)]_\kappa$.

Por otro lado, si $x \in [f^{-1}(E)]_\kappa$, entonces existe $C \subseteq f^{-1}(E)$ tal que $x \in cl_X C$ y $|C| \leq \kappa$. Puesto que f es continua, $f(x) \in cl_Y f(C)$. Ahora bien, $f(C) \subseteq E$ y $|f(C)| \leq \kappa$; luego $cl_Y f(C) \subseteq E$. Por tanto $f(x) \in E$; así, $x \in f^{-1}(E)$ y por tanto $[f^{-1}(E)]_\kappa \subseteq f^{-1}(E)$. De donde, $f^{-1}(E) = [f^{-1}(E)]_\kappa$. Puesto que $[f^{-1}(E)]_\kappa$ es cerrado en X, de la sobreyectividad de f y el hecho de que f es cerrada se tiene que E es cerrado en Y, *i.e.* $[F]_\kappa$ es cerrado en Y; por tanto $t(Y) \leq \kappa = t(X)$. $\square$

Proposición 3.7 *Para cualquier espacio X, $t(X) \leq h\pi\chi(X)$; donde $h\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(Y) : Y$ es subespacio de $X\}$.*

Demostración: Sea $x_0 \in X$ y C un subconjunto de X tal que $x_0 \in cl_X(C)$; sea además $\kappa = h\pi\chi(X)$. Como $\pi\chi(cl_X(C)) \leq \kappa$, existe una $\pi-$base local $\mathcal{B}$ de x_0 en $cl_X(C)$ tal que $|\mathcal{B}| \leq \kappa$.

Note que si $B \in \mathcal{B}$, entonces $B \cap C \neq \emptyset$. En efecto, para tal $B \in \mathcal{B}$, existe U_B abierto en X tal que $B = U_B \cap cl_X(C)$. Así, si $y \in B$, entonces $y \in cl_X(C)$ y $y \in U_B$, por tanto $U_B \cap C \neq \emptyset$; pero $U_B \cap C \subseteq U_B \cap cl_X(C) = B$. Por tanto $B \cap C \neq \emptyset$. De aquí resulta que, para cada $B \in \mathcal{B}$, es posible tomar $y_B \in B \cap C$; sea $M = \{y_B : B \in \mathcal{B}\}$. No es difícil verificar que $M \subseteq C$, $|M| \leq \kappa$ y $x_0 \in cl_X(M)$. $\square$

La igualdad en $t(X) \leq h\pi\chi(X)$ se tiene cuando X es Hausdorff y compacto, lo cual se demostrará en la sección 4.

Terminamos esta sección con un resultado que nos dice cómo encontrar una cota por arriba para la estrechez de un espacio producto (no necesariamente formado con espacios Hausdorff y compactos).

Teorema 3.8 *Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia no vacía de espacios topológicos (no vacíos) y κ un cardinal. Si para todo $S_0 \in [S]^{<\omega}$, $t(X_{S_0}) \leq \kappa$, y $|S| \leq \kappa$, entonces $t(X) \leq \kappa$.*

Demostración: Sea $C \subseteq X$ y $x \in cl_X(C)$. Queremos demostrar que existe $C_0 \subseteq C$ tal que $|C_0| \leq \kappa$ y $x \in cl_X(C_0)$.

Denotemos por $\mathcal{F}$ la colección $[S]^{<\omega}$. Entonces $|\mathcal{F}| \leq \kappa$. Ahora bien, para cada $F \in \mathcal{F}$, sea $X_F = \prod_{s\in F} X_s$ y sea $pr_F : X \to X_F$ el mapeo proyección sobre la cara X_F.

Puesto que $t(X_F) \leq \kappa$ y $pr_F(x) \in pr_F(cl_X C) \subseteq cl_{X_F}(pr_F(C)) = [pr_F(C)]_\kappa$, entonces, para todo $F \in \mathcal{F}$, existe $M_F \subseteq pr_F(C)$ tal que $|M_F| \leq \kappa$ y $pr_F(x) \in cl_{X_F}(M_F)$; ahora bien, para cada M_F, constrúyase $D_F \subseteq C$ como sigue: por cada $(x_s)_{s\in F} \in M_F$, elíjase un punto en $pr_F^{-1}(\{(x_s)_{s\in F}\}) \cap C$. Claramente, $|D_F| \leq \kappa$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Considérese ahora $C_0 = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} D_F$. Puesto que $D_F \subseteq C$ para todo $F \in \mathcal{F}$, se tiene que $C_0 \subseteq C$. Más aún, como $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ y $|D_F| \leq \kappa$ para todo $F \in \mathcal{F}$, se tiene que $|C_0| \leq \kappa$.

Por último, veamos que, $x \in cl_X(C_0)$.

Efectivamente, sea U un abierto canónico en X que contiene a x, digamos $U = \prod_{s\in S} U_s$, donde, para $s \in S$, $U_s = X_s$ salvo un número finito de índices s_1,...,s_n. Entonces $A = \{s_1, ..., s_n\} \in \mathcal{F}$; luego, dado que $pr_A(x) \in cl_{X_A}(M_A)$, existe $(x_{s_1}, ..., x_{s_n}) \in M_A \cap (pr_A(C) \cap (U_{s_1} \times \cdots \times U_{s_n}))$. Para tal $(x_{s_1}, ..., x_{s_n})$ existe $y \in D_A$, y por tanto en C_0, tal que $pr_A(y) = (x_{s_1}, ..., x_{s_n})$. De aquí, ya es claro que $U \cap C_0 \neq \emptyset$. Por tanto $x \in cl_X(C_0)$. Así $t(X) \leq \kappa$. $\square$

4 Estrechez y compacidad

En la presente sección daremos algunos resultados de la estrechez sobre la clase C_2 de espacios Hausdorff y compactos; en particular, probaremos las igualdades señaladas en el resumen.

Definición 4.1 Una sucesión $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa\}$ en el espacio X es una sucesión libre de longitud κ si para todo $\beta < \kappa$: $cl_X\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \cap cl_X\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\} = \emptyset$.

Observe que si $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa\}$ es una sucesión libre de longitud k en X, entonces $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto discreto en X.

Teorema 4.2 *Si $X \in \mathcal{C}_2$ y $t(X) \leq \kappa$, entonces X no tiene una sucesión libre de longitud κ^+.*

Demostración: Supongamos que $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ es una sucesión libre de longitud κ^+. Puesto que X es compacto, el conjunto $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ tiene un punto de acumulación completo, digamos z_0. Por otra parte, dado que $t(X) \leq \kappa$ existe $\beta_0 < \kappa^+$ tal que $z_0 \in cl_X\{x_\alpha : 0 \leq$

$\alpha < \beta_0\}$; luego, dado que $cl_X\{x_\alpha : \alpha < \beta_0\} \cap cl_X\{x_\alpha : \alpha \geq \beta_0\} = \emptyset$, existe una vecindad abierta U de z_0 tal que $U \cap \{x_\alpha : \alpha \geq \beta_0\} = \emptyset$. De aquí y el hecho de que $U \cap \{x_\alpha : \alpha < \beta_0\} \neq \emptyset$, se tiene que $|U \cap \{x_\alpha : \alpha < \beta_0\}| < \kappa^+$, lo cual contradice que z_0 es punto de acumulación completo del conjunto $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$. $\square$

El lector puede consultar la prueba del siguiente resultado en [3].

Lema 4.3 *Sea $X \in \mathcal{T}_3$, K un subconjunto compacto de X y $p \in X \backslash K$. Entonces existen conjuntos cerrados y G_δ, A y B en X tales que $p \in A$, $K \subseteq B$ y $A \cap B = \emptyset$.*

Teorema 4.4 *Si $X \in \mathcal{C}_2$ y $h\pi\chi(X) > \kappa$, entonces X tiene una sucesión libre de longitud κ^+.*

Demostración: Puesto que $\pi\chi(Y) \leq \pi\chi(\overline{Y})$, para demostrar el resultado es suficiente suponer que $\pi\chi(X) > \kappa$. Sea $p \in X$ tal que $\pi\chi(p, X) \geq \kappa^+$. Sea $\mathcal{G}$ la colección de todos los conjuntos cerrados, no vacíos y G_δ en X. La colección $\mathcal{G}$ tiene la siguiente propiedad:

($*$) si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ y $|\mathcal{H}| \leq \kappa$, entonces existe una vecindad abierta R de p tal que $H \backslash R \neq \emptyset$ para todo $H \in \mathcal{H}$.

En efecto, supongamos que la colección $\mathcal{G}$ no satisface ($*$); *i.e.*, existe $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ con $|\mathcal{H}| \leq \kappa$ tal que para toda vecindad abierta R de p existe $H_R \in \mathcal{H}$ de tal forma que $H_R \subseteq R = \emptyset$. Ahora, puesto que X es compacto, para cada H_R existe U_{H_R} abierto en X de tal forma que $H_R \subseteq \overline{U}_{H_R} \subseteq R$. Entonces la colección $\{U_{H_R} : H_R \in \mathcal{H}\}$ es una $\pi-$base de p con $|\{U_{H_R} : H_R \in \mathcal{H}\}| \leq \kappa$. Lo cual contradice el hecho de que $\pi\chi(p, X) > \kappa$.

Para continuar, construiremos subcolecciones $\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ y $\{B_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ de $\mathcal{G}$ tales que:

(1) $p \in A_\alpha$ y $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$, $0 \leq \alpha < \kappa^+$;

(2) Si $H \neq \emptyset$ es intersección finita de elementos de $\{A_\beta : 0 \leq \beta < \alpha\} \cup \{B_\beta : 0 \leq \beta < \alpha\}$, entonces $H \cap B_\alpha \neq \emptyset$, $0 < \alpha < \kappa^+$.

La construcción es por inducción transfinita. Para obtener A_0 y B_0, sea K compacto en X tal que $p \notin K$; por el lema 4.3, existen A_0, $B_0 \in \mathcal{G}$ tales que $p \in A_0$, $K \subseteq B_0$ y $A_0 \cap B_0 = \emptyset$. Ahora sea α fijo, $0 < \alpha < \kappa^+$, y supongamos que $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\{B_\beta : \beta < \alpha\}$ se tienen construidos de tal modo que (1) y (2) se verifican. Por construir A_α y B_α. Sea $\mathcal{H}$ la colección de todas las intersecciones finitas no vacías de elementos de $\{A_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{B_\beta : \beta < \alpha\}$. Entonces $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, $\mathcal{H} \neq \emptyset$ y $|\mathcal{H}| \leq \kappa$, así que por $(*)$, existe una vecindad abierta R de p tal que $H\backslash R \neq \emptyset$ para todo $H \in \mathcal{H}$. Como $X\backslash R$ es cerrado en el compacto X, entonces $X\backslash R$ es compacto y $p \notin X\backslash R$; luego, por el lema 4.3, existen A_α, B_α en $\mathcal{G}$ tales que $p \in A_\alpha$, $(X\backslash R) \subseteq B_\alpha$ y $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$. Ahora $H\backslash R \neq \emptyset$ implica que $H \cap B_\alpha \neq \emptyset$, de donde (1) y (2) se verifican. Así termina la construcción.

Ahora bien, usando las partes (1) y (2) e inducción finita, se puede demostrar que para cada α fijo, $0 < \alpha < \kappa^+$, la colección $\{A_\beta : \beta \leq \alpha^+\} \cup \{B_\beta : \beta > \alpha^+\}$ satisface la *propiedad de la intersección finita* (*i.e.* cualquier subconjunto finito de dicha colección tiene intersección no vacía).

De lo anterior y la compacidad de X, tenemos que para cada α, existe $x_\alpha \in (\bigcap_{\beta\leq\alpha} A_\beta) \cap (\bigcap_{\beta>\alpha} B_\beta)$. Entonces $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ es una sucesión libre en X de longitud κ^+. Por supuesto, sea $\varepsilon < \kappa^+$. Es suficiente demostrar que $\{x_\alpha : \alpha < \varepsilon\} \subseteq B_\varepsilon$ y $\{x_\alpha : \alpha \geq \varepsilon\} \subseteq A_\varepsilon$; pues por la segunda parte de (1) y el hecho de que A_α y B_α son cerrados y ajenos, para todo $\alpha < \kappa^+$, tendríamos que $cl_X(\{x_\alpha : \alpha < \varepsilon\}) \cap cl_X(\{x_\alpha : \alpha \geq \varepsilon\}) = \emptyset$. Para ver la primera contención, note que si $\alpha < \varepsilon$, entonces $x_\alpha \in (\bigcap_{\beta\leq\alpha} A_\beta) \cap (\bigcap_{\beta>\alpha} B_\beta) \subseteq B_\varepsilon$. Para la segunda, tenemos que $x_\alpha \in (\bigcap_{\beta\leq\alpha} A_\beta) \cap (\bigcap_{\beta>\alpha} B_\beta)$, $x_\alpha \in A_\beta$ para $\beta \leq \alpha$, de donde, si $\alpha \geq \varepsilon$, $x_\alpha \in A_\varepsilon$. $\square$

Corolario 4.5 *Si $X \in \mathcal{C}_2$ y $t(X) > \kappa$, entonces X tiene una sucesión libre de longitud κ^+.*

Demostración: Como $\kappa < t(X)$ y $t(X) \leq h\pi\chi(X)$, entonces $h\pi\chi(X) > \kappa$ y, por tanto, X tiene una sucesión libre de longitud κ^+. $\square$

Como se observa en el teorema 4.2 y el corolario 4.5, existe una relación entre la estrechez de un espacio Hausdorff y compacto y la longitud de las sucesiones libres en él, a saber:

Teorema 4.6 *(Arkhangel'skiĭ) Para $X \in \mathcal{C}_2$, $t(X) = F(X)$, donde $F(X) = \sup\{\lambda : X$ tiene una sucesión libre de longitud $\lambda\} + \omega$.*

Demostración: Sea $\kappa = t(X)$ y $\beta = F(X)$. Si $\kappa < \beta$ entonces X tiene una sucesión libre de longitud κ^+. Pero esto contradice 4.2. Por tanto $\kappa \geq \beta$. Si $\kappa > \beta$, entonces, por el corolario 4.5, X tiene una sucesión libre de longitud β^+; lo cual contradice la definición de β. Por tanto $\kappa = \beta$. $\square$

Teorema 4.7 *(Šapirovskiĭ) Para $X \in \mathcal{C}_2$, $t(X) = h\pi\chi(X)$. En particular, todo subespacio de un espacio Hausdorff y compacto con estrechez numerable tiene $\pi-$caracter numerable.*

Demostración: Puesto que $t(X) \leq h\pi\chi(X)$, es suficiente demostrar que no ocurre que $t(X) < h\pi\chi(X)$. Si $t(X) < h\pi\chi(X)$, entonces, por el teorema 4.4, X tiene una sucesión libre de longitud $t(X)^+$, contradiciendo el teorema anterior. $\square$

Teorema 4.8 *(Arkhangel'skiĭ) Para $X \in \mathcal{C}_2$, $t(X) \leq s(X)+$. En particular, todo espacio compacto con amplitud numerable tiene estrechez numerable.*

Demostración: Sea $\kappa = s(X)$. Si $t(X) > \kappa$, entonces por el corolario 4.5, X tiene una sucesión libre de longitud κ^+. Puesto que toda sucesión libre es un conjunto discreto, entonces X tiene un subconjunto discreto de cardinalidad $> s(X)$; lo cual es una contradicción. Por tanto $t(X) \leq s(X)$. $\square$

Suponga que $\{X_s : s \in S\}$ es una colección, no vacía, de espacios topológicos. Supóngase además que X es el espacio producto de dichos espacios. Bajo el supuesto de que $D(2)^{|S|} \hookrightarrow X$ (donde $D(2)^{|S|}$ es el cubo de Cantor de peso $|S|$, vea [2], pg. 84) o $F(2)^{|S|} \hookrightarrow X$ (donde $F(2)^{|S|}$ es el cubo de Alexandroff de peso $|S|$, vea [2], pg. 84), es posible demostrar que $t(X) \geq |S| \cdot t_S(X)$, donde $t_S(X) = \{t(X_s) : s \in S\}$. En general, la igualdad no siempre se da, aun en el caso finito:

Ejemplo 4.9 Considere κ un cardinal arbitrario con la topología discreta y el espacio compacto $Z = \{\frac{1}{n} : n \in \omega\} \cup \{0\}$. En el producto $\kappa \times Z$, identificamos los puntos de la forma $(\alpha, 0)$, para $\alpha \in \kappa$; y denotamos por V_κ al espacio cociente resultante. Entonces, para todo cardinal κ, $t(V_\kappa) = \omega$. Por otro lado, $t(V_\omega \times V_c) > \omega$ (consulte [1]).

Para el caso en que cada $X_s \in \mathcal{C}_2$, la estrechez verifica la igualdad en $t(X) \geq |S| \cdot t_S(X)$. La prueba requiere de algunos resultados que a continuación se dan.

El siguiente resultado es una generalización del lema de la página 113 de la referencia [4].

Lema 4.10 *Si $X \in \mathcal{T}_1$ y Y es Hausdorff y localmente compacto, entonces $t(X \times Y) \leq t(X) \cdot t(Y)$.*

Demostración: Sea $\kappa = t(X) \cdot t(Y)$ y A un subconjunto $\kappa-$cerrado en $X \times Y$. Sea $(x, y) \in cl_{X \times Y}(A)$. Demostraremos que $(x, y) \in A$.

Sea $B = (\{x\} \times Y) \cap A$. Note que para demostrar que $(x, y) \in A$ es suficiente con probar que $y \in pr_Y(B)$.

Afirmamos que B es cerrado en $\{x\} \times Y$. En efecto, si $B = \emptyset$, nada que probar.

Supongamos, pues, que B no es vacío. Entonces B es $\kappa-$cerrado en $\{x\} \times Y$. Por supuesto, si $C \subseteq B$ tal que $|C| \leq \kappa$, entonces $C \subseteq \{x\} \times Y$, $C \subseteq A$ y $|B| \leq \kappa$. Claramente, $cl_{\{x\} \times Y} C \subseteq (\{x\} \times Y)$; por otro lado, puesto que $C \subseteq A$ y $|C| \leq \kappa$, se tiene que $cl_{X \times Y}(C) \subseteq A$; de donde $cl_{\{x\} \times Y} C = cl_{X \times Y}(C) \cap (\{x\} \times Y) \subseteq A \cap (\{x\} \times Y) = B$. Así, B es $\kappa-$cerrado en $\{x\} \times Y$. Ahora bien, puesto que $t(\{x\} \times Y) = t(Y) \leq \kappa$, se tiene que B es cerrado en $\{x\} \times Y$ (y por tanto, cerrado en $X \times Y$).

Veamos, pues, que $y \in pr_Y(B)$. Supongamos, por el contrario, que $y \notin pr_Y(B)$. Como B es cerrado en $\{x\} \times Y$ y $pr_Y : \{x\} \times Y \to Y$ es homeomorfismo, entonces $pr_Y(B)$ es un subespacio cerrado de Y. Sea V una vecindad compacta de y en Y que no intersecta a $pr_Y(B)$. Entonces $X \times V$ es una vecindad cerrada de (x, y) en $X \times Y$; por lo cual $(x, y) \in cl_{X \times Y}((X \times V) \cap A)$. En particular, $(x, y) \in cl_{X \times V}[(X \times V) \cap A]$.

Ahora bien, como $X \times V$ es cerrado en $X \times Y$ y A es $\kappa-$cerrado en $X \times Y$, entonces $(X \times V) \cap A$ es $\kappa-$cerrado en $X \times Y$. En particular, $(X \times V) \cap A$ es $\kappa-$cerrado en $X \times V$. Como V es compacto en Y, entonces $pr_X : X \times V \to X$, es cerrada, y por lo tanto $pr_X((X \times V) \cap A)$ es κ cerrado en X. Así, por la continuidad de $pr_X : X \times V \to X$, obtenemos que $x \in pr_X(cl_{X \times V}[(X \times V) \cap A]) \subseteq cl_X[pr_X((X \times V) \cap A)] = pr_X((X \times V) \cap A)$. Por tanto, existe $r \in V$ tal que $(x, r) \in (\{x\} \times V) \cap A \subseteq B$; lo que significa que $r \in V \cap pr_Y B$; lo cual es una contradicción. Por tanto $y \in pr_Y B$. La prueba está completa. $\Box$

La siguiente proposición es consecuencia inmediata del lema anterior.

Proposición 4.11 *Si para cada* $i \in \{1, ..., n\}$, $X_i \in \mathcal{C}_2$, *entonces* $t(\prod_{i=1}^{n} X_i) \leq \max\{t(X_i) : i \in \{1, ..., n\}\}$.

Ahora daremos la prueba del caso general (en $\mathcal{C}_2$, por supuesto).

Teorema 4.12 *Sea* $\{X_s : s \in S\}$ *una familia no vacía de espacios topológicos (no vacíos). Si cada* $X_s \in \mathcal{C}_2$, *entonces* $t(X) = |S| \cdot t_S(X)$.

Demostración: Sea $\kappa = |S| \cdot t_S(X)$. Sea $A = [C]_\kappa$, donde $C \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, y sea $x \in cl_X(A)$. Puesto que cada X_s es compacto se tiene que, para cualquier $S_0 \in [S]^{<\omega}$, pr_{S_0} es una función cerrada; luego, por la proposición 3.2, para cualquier $S_0 \in [S]^{<\omega}$, $pr_{S_0}(A)$ es $\kappa-$ cerrado en X_{S_0}. Así, dado que $t_{S_0}(X) \leq \kappa$, se tiene que $pr_{S_0}(A)$ es cerrado en X_{S_0}. Consecuentemente, para cada $S_0 \in [S]^{<\omega}$ $pr_{S_0}(x) \in pr_{S_0}(A)$, de donde se deduce que existe un punto $a \in A$ tal que $x\mid_{S_0} = a$. Sea B el conjunto formado por estos puntos, entonces $B \in [A]^{\leq\kappa}$, puesto que $|[S]^{<\omega}| = |S| \leq \kappa$. Luego, claramente se tiene que $x \in cl_X B \subseteq A$. Por la definición de B y el hecho de que A es $\kappa-$cerrado. $\square$

Agradecimientos

A mi novia Homaira Athenea Ramírez Gutiérrez, a quien además, dedico este trabajo.
Quiero agradecer a Jesús F. Tenorio Arvide su revisión y sugerencias a este trabajo.

Alejandro Ramírez Páramo
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Av. San Claudio y Rio Verde s/n,
Puebla Pue., MEXICO,
aparamo@fismat1.fcfm.buap.mx.

Referencias

[1] Arkhangel'skiĭ, A. V., *Structure and Classification of Topological Spaces and Invariants*, Russian Math Survey, **33** (1978), 33-96.

[2] Engelking, R., General Topology, Heldermann Verlag Berlin 1989.

[3] Hodel, R., Cardinal Functions in Topology I, Handbook of linebreak Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. E. Vaughan, eds., linebreak Amsterdam, 1984.

[4] Juhász, I., Cardinal Functions in Topology (ten years later), Heldermann Verlag Berlin, 1989.