Álgebra generada por la proyección de Bergman y un operador de translación II *

Josué Ramírez Ortega

Resumen

En este artículo se calcula el índice de los operadores de Fredholm del álgebra C^* generada por un operador de translación, la proyección de Bergman de un dominio $G \subset \mathbb{C}$ y los operadores de multiplicación por funciones continuas en $\overline{G}$.

2000 Mathematics Subject Classification: 32A36, 32A55, 47B34, 47L15.

Keywords and phrases: proyección de Bergman, operador de translación.

1 Introducción

Algunas ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones en la frontera [8, 9, 10, 11] se pueden transformar en ecuaciones integrales que involucran al operador de conjugación y al operador integral singular

$$(S_G\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_G \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

donde G es un dominio acotado del plano complejo cuya frontera es suave. Por mencionar un ejemplo simple [9], supóngase que $a(z)$, $b(z)$, $g(z)$ son funciones diferenciables que satisfacen en $\overline{G}$ una condición de Hölder de orden λ , $0 < \lambda < 1$. Con estas funciones se plantea la ecuación integral

$$(1.1) \quad a(z)w(z) - b(z)(Sw)(z) = g(z).$$

*Este artículo es parte de la tesis doctoral del autor realizada en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN con el apoyo económico del CONA-CyT.

Si $|a(z)| - |b(z)| > 0 \quad \forall z \in \overline{G}$, entonces la ecuación anterior tiene solución única, como puede verse en [30].

Supongamos que

$$|a(z)| - |b(z)| < 0, \quad \forall z \in \overline{G}.$$

Si $w(z)$ es una solución de la ecuación (1.1), entonces

$$\phi(z) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \int_G \frac{\overline{w(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta, & z \in G \\ -\frac{1}{\pi} \int_G \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, & z \in \overline{G}^c \end{cases}$$

es una solución de la ecuación elíptica de primer orden

$$(1.2) \quad \overline{b(z)} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}}(z) - \overline{a(z)} \frac{\partial \phi}{\partial z}(z) = \overline{g(z)}, \quad z \in G.$$

Además, $\phi(z)$ es holomorfa en el complemento de $\overline{G}$ y satisface las siguientes condiciones:

$$(1.3) \quad \phi^+(t) = \overline{\phi^-(t)} \quad (t \in \partial G) \quad \text{y} \quad \phi(\infty) = 0,$$

donde $\phi^+(t)$ es el límite de $\phi(z)$ cuando $z \in G$ tiende a t ; y $\phi^-(t)$ es el límite de $\phi(z)$ cuando $z \in \overline{G}^c$ tiende a t .

Recíprocamente, si $\phi(z)$ es una solución de (1.2), holomorfa en $\overline{G}^c$ y satisface la condición (1.3), entonces la función

$$w(z) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)$$

es una solución de la ecuación (1.1), donde $f(z) = \overline{\phi(z)}$ en G y $f(z) = \phi(z)$ en $\overline{G}^c$.

Supongamos que la frontera de G es unión finita de curvas cerradas simples, de clase C^1 , ajenas por pares. El *espacio de Bergman de G* , denotado por $A^2(G)$, es el espacio de funciones holomorfas cuadrado integrables en G con respecto a la medida de Lebesgue. La *proyección de Bergman*, denotada por K , es la proyección ortogonal de $L_2(G)$ sobre el espacio de Bergman.

Sea α un difeomorfismo de $\overline{G}$ en $\overline{G}$, de clase C^2 , tal que satisface la condición de Carleman $\alpha \circ \alpha = \text{id}_{\overline{G}}$ (el símbolo "o" denotará la composición de funciones). A partir de este difeomorfismo se define el operador acotado en $L_2(G)$ (*operador de translación*) cuya regla de correspondencia es $W\varphi = w$ ($\varphi \circ \alpha$), donde w es una función definida en $\overline{G}$.

En [23] se demostró que W es unitario autoadjunto si $w = \sqrt{|\det J_\alpha|}g$, donde J_α es la matriz Jacobiana de α y $g : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ es cualquier función medible que satisface la ecuación $g(g \circ \alpha) = 1$ casi en todo punto. En ese mismo artículo se consideró el caso particular $g = 1$ y se estudió el álgebra $\mathcal{R} = \mathcal{R}(C(\overline{G})I; K, W)$ ¹, la cual está generada por K , W y los operadores de multiplicación por funciones continuas en $\overline{G}$. Esta álgebra contiene al ideal de operadores compactos, denotados por $\mathcal{C}$.

Muchos trabajos se han realizado acerca de la representación de álgebras de Banach por medio de las secciones continuas de un haz fibrado [6, 7, 13, 14, 18, 20, 25]. De singular importancia en este campo es el principio local de Douglas-Varela [25] el cual establece, en un caso particular, la representación de una álgebra C^* como el espacio de secciones continuas de un haz C^* . El haz C^* se construye a partir de una subálgebra del centro del álgebra en consideración. Con el principio local de Douglas-Varela se demostró que el álgebra $\mathcal{R}/\mathcal{C}$ es isomorfa a una álgebra de matrices continuas sobre un conjunto compacto del espacio tridimensional [23].

En el estudio de $\mathcal{R}/\mathcal{C}$, hecho fundamental [1, 12] fue la siguiente representación de la proyección de Bergman:

$$K = I - S_G S_G^* + L,$$

donde L es un operador compacto.

N. L. Vasilevski estudió el álgebra $\mathcal{R}_G = \mathcal{R}(C(\overline{G})I; S_G)$ [28] y el álgebra $\mathcal{R}(PC(\overline{G})I; K)$ [26], donde $PC(\overline{G})$ denota un espacio de funciones continuas a trozos en $\overline{G}$ (para una definición precisa de $PC(\overline{G})$ véase [26]). A partir de este marco de referencia se emprende el estudio del álgebra $\mathcal{R}$. Aunque no se demuestra en este artículo, el operador WKW pertenece a $\mathcal{R}_G$ y, por consiguiente, $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(C(\overline{G})I; K, WKW)$ es una subálgebra de $\mathcal{R}_G$. El siguiente diagrama muestra como están contenidas unas en otras las álgebras mencionadas:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}(C(\overline{G})I; K) & \subset & \mathcal{R}_0 & \subset & \mathcal{R}_G \\ \cap & & \cap & & \\ \mathcal{R}(PC(\overline{G})I; K) & & \mathcal{R} & & \end{array}$$

A continuación esbozaremos el procedimiento mediante el cual se logra representar el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}_0$ como el álgebra de secciones continuas de un haz C^* . Esta descripción se obtiene del principio local

¹Si $A_1, \dots, A_m$ son operadores y $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ son familias de operadores, $\mathcal{R}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n; A_1, \dots, A_m)$ denota el álgebra C^* generada por $A_1, \dots, A_m$ y $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$.

de Douglas-Varela [25] aplicado del siguiente modo: Sea π la proyección natural de $\mathcal{R}_0$ al álgebra de Calkin $\hat{\mathcal{R}}_0 := \mathcal{R}_0/\mathcal{C}$. La imagen $Z = \pi(C(\overline{G})I)$ es una subálgebra del centro de $\hat{\mathcal{R}}_0$ y su espacio de ideales maximales es homeomorfo a $\overline{G}$. Cada ideal maximal I_{ζ_0} de Z ($\zeta_0 \in \overline{G}$) genera el ideal $J_{\zeta_0} = \hat{\mathcal{R}}_0 \cdot I_{\zeta_0}$. Al cociente $\mathcal{R}_0(\zeta_0) := \hat{\mathcal{R}}_0/J_{\zeta_0}$ se le llamará *álgebra local de $\mathcal{R}_0$ en el punto ζ_0* . Sea E la unión ajena

$$\bigsqcup_{\zeta \in \overline{G}} \mathcal{R}_0(\zeta)$$

y $p : E \rightarrow \overline{G}$ la proyección natural.

Cada operador $A \in \mathcal{R}_0$ induce la sección

$$A(\zeta) = (\pi_\zeta \circ \pi)(A) : \overline{G} \rightarrow E,$$

donde $\pi_\zeta : \hat{\mathcal{R}}_0 \rightarrow \mathcal{R}_0(\zeta)$ es la proyección natural.

La imagen de un operador A en el álgebra de Calkin será común denotarla por $\hat{A}$.

Cada álgebra local $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$ es una álgebra C^* , por lo que si U es un abierto de $\overline{G}$ y $\epsilon > 0$, entonces los conjuntos

$$V = V(A, U, \epsilon) = \{x \in E : p(x) \in U, \|x - A(p(x))\| < \epsilon\}$$

están bien definidos. Estos conjuntos forman una subbase para una topología de E tal que el álgebra $\hat{\mathcal{R}}_0$ es isomorfa al álgebra de secciones continuas del haz $\xi = (p, E, \overline{G})$ [25]. Gran parte del trabajo desarrollado en [23] se dedica a obtener la descripción de las fibras de ξ .

Se dice que dos operadores $A, B \in \mathcal{R}_0$ son *equivalentes en $\zeta_0 \in \overline{G}$* , si tienen la misma imagen en $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$. Se dice que un operador $A \in \mathcal{R}_0$ es de *Fredholm localmente en ζ_0* , si su imagen en $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$ es un elemento invertible. El *resolvente local de A en ζ_0* es el conjunto de escalares λ tales que $\lambda I - A$ es un operador de Fredholm localmente en ζ_0 . El *espectro local de A en ζ_0* es el complemento del resolvente local en el mismo punto.

Si $a \in C(\overline{G})$, entonces aI es equivalente al operador “escalar” $a(\zeta_0)I$ en el punto $\zeta_0 \in \overline{G}$. En [23] se demostró que las proyecciones K y WKW son equivalentes al operador cero en cada punto $\zeta_0 \in \overline{G}$. Así, el álgebra $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$ es isomorfa al campo de los números complejos.

Cuando $\zeta_0 \in \partial G$, las imágenes de K y WKW en $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$ son “proyecciones ortogonales” diferentes de cero, denotadas por

$$(1.4) \quad p_1 = \pi_{\zeta_0}(\hat{K}) \quad \text{y} \quad p_2 = \pi_{\zeta_0}(\hat{W}\hat{K}\hat{W}).$$

Estos elementos generan el álgebra local, por lo que $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$ es isomorfa a una álgebra de matrices 2×2 continuas en $\Delta \subset [0, 1]$ [24], donde Δ es el espectro local de $(K - WKW)^2$. De ahí la importancia por encontrar a Δ .

Sean P_1 y P_2 dos proyecciones ortogonales diferentes de cero y de la identidad, y sea $\mathcal{R}_P = \mathcal{R}(I, P_1, P_2)$ el álgebra C^* generada por P_1 , P_2 y la identidad.

Lema 1.1 [24] *Si las proyecciones P_1 y P_2 satisfacen las condiciones*

$$i) \ 0 \in \Delta = \text{sp}(P_1 - P_2)^2 \text{ implica } \pm 1 \in \text{sp}(I - P_1 - P_2),$$

$$ii) \ 1 \in \Delta \text{ implica } \pm 1 \in \text{sp}(P_1 - P_2),$$

entonces el álgebra $\mathcal{R}_P$ es isomorfa al álgebra $\mathcal{U}$, la cual está formada por todas las matrices 2×2 continuas en Δ y diagonales en $\Delta \cap \{0, 1\}$. El isomorfismo $\varphi : \mathcal{R}_P \rightarrow \mathcal{U}$ está generado por la siguiente aplicación de los generadores de $\mathcal{R}_P$:

$$(1.5) \quad \varphi(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(1.6) \quad \varphi(P_2) = \begin{pmatrix} 1-t & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & t \end{pmatrix}, \quad t \in \Delta.$$

Si 0 es punto de acumulación de Δ , entonces $0 \in \Delta$ y se cumple la condición *i*). Análogamente, se satisface la condición *ii*) si 1 es punto de acumulación de Δ .

La demostración del siguiente lema es análoga a la demostración del Lema 1.1 [24].

Supongamos que las proyecciones P_1 y P_2 cumplen la condición *ii*) y, en lugar de *i*), satisfacen la condición

$$i)' \ 0 \in \Delta \text{ y } -1 \notin \text{sp}(I - P_1 - P_2).$$

Sea $\Delta_0 = \Delta \setminus \{0\}$ y $\mathcal{U}_0$ el álgebra de todas las matrices 2×2 continuas en Δ_0 y diagonales en $\Delta \cap \{1\}$. Por lo dicho inmediatamente después del Lema 1.1, la condición *i)'* implica que 0 es un punto aislado del espectro de $(P_1 - P_2)^2$.

Lema 1.2 *El álgebra $\mathcal{R}_P$ es isomorfa al álgebra $\mathbb{C} \times \mathcal{U}_0$. El isomorfismo $\varphi : \mathcal{R}_P \rightarrow \mathbb{C} \times \mathcal{U}_0$ está generado por la siguiente aplicación de los generadores de $\mathcal{R}_P$:*

$$(1.7) \quad \varphi(P_1) = \left(0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$(1.8) \quad \varphi(P_2) = \left(0, \begin{pmatrix} 1-t & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & t \end{pmatrix}\right), \quad t \in \Delta_0.$$

Pasemos a la descripción de $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$. Si el Jacobiano de α es mayor que cero, entonces se define la función

$$(1.9) \quad \beta(\zeta) = \frac{\|J_\alpha(\zeta)\|_2^2 - 2 \det J_\alpha(\zeta)}{\|J_\alpha(\zeta)\|_2^2 + 2 \det J_\alpha(\zeta)},$$

donde $J_\alpha(\zeta)$ es la matriz Jacobiana de α en el punto ζ .

Teorema 1.1 [23] *Sea $\zeta_0 \in \partial G$. Si el Jacobiano de α es menor que cero, entonces $\text{sp}(p_1 - p_2) = \{0, \pm 1\}$ y $\text{sp}(e - p_1 - p_2) = \{0, 1\}$. Por otra parte, si el Jacobiano de α es mayor que cero, entonces $\text{sp}(p_1 - p_2) = \{0, \pm \sqrt{\beta(\zeta_0)}\}$ y $\text{sp}(e - p_1 - p_2) = \{1, \pm \sqrt{1 - \beta(\zeta_0)}\}$.*

Aunque en [23] no se calculó el espectro de $e - p_1 - p_2$, el procedimiento para calcularlo es análogo al efectuado para calcular el espectro de $p_1 - p_2$.

Obsérvese que $\beta(\zeta)$ es menor que 1. Para describir a $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$ se utiliza el Lema 1.2 si el Jacobiano de α es menor que cero o $\beta(\zeta_0) > 0$; sin embargo, si $\beta(\zeta_0) = 0$, entonces se utiliza el Lema 1.1. Así, $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$ está generada por los elementos

$$(1.10) \quad p_1 = \left(0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{y} \quad p_2 = \left(0, \begin{pmatrix} 1-t & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & t \end{pmatrix}\right),$$

donde t es igual a 1 si el Jacobiano de α es menor que cero y $t = \beta(\zeta_0)$ si el Jacobiano es mayor que cero. Con esto quedan descritas las fibras $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$ y, por consiguiente, también queda descrita el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}_0$, como se muestra a continuación.

Considérese el operador

$$(1.11) \quad A = a_1(\zeta)A_1 + a_2(\zeta)A_2 + a_3(\zeta)A_3 + T,$$

donde T es un operador compacto, $a_j(\zeta) \in C(\overline{G})$ ($j = 1, 2, 3$) y

$$(1.12) \quad A_1 = I - K - WKW, \quad A_2 = K, \quad A_3 = WKW.$$

Teorema 1.2 *Si el Jacobiano de α es menor que cero, entonces el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}_0$ es isomorfa e isométrica al álgebra $C(\overline{G}) \times (C(\partial G))^2$. El isomorfismo $\Phi : \hat{\mathcal{R}}_0 \rightarrow C(\overline{G}) \times (C(\partial G))^2$ está dado por*

$$\Phi(\hat{A}) = (a_1(\zeta), a_2(\zeta)|_{\partial G}, a_3(\zeta)|_{\partial G}),$$

donde A es el operador definido en (1.11).

Ahora supongamos que el Jacobiano de α es mayor que cero. Definamos los siguientes operadores del álgebra $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= K, & A_{12} &= K(WKW)(I - K), \\ A_{21} &= A_{12}^*, & A_{22} &= (I - K)WKW(I - K). \end{aligned}$$

Supongamos también que $\beta(\zeta)$ no se anula en la frontera de G . Sea $\delta(\zeta)$ una función continua no negativa definida en $\overline{G}$ tal que se anula en la frontera de G y $\delta(\zeta) > 0$ para cada $\zeta \in G$. Como los valores de $\beta(\zeta)$ están en $[0, 1)$ y $\overline{G}$ es compacto, $\sup_{\zeta \in \overline{G}} \beta(\zeta) = \max_{\zeta \in \overline{G}} \beta(\zeta) < 1$. Así, los siguientes operadores están bien definidos:

$$(1.13) \quad B_0 = I - A_{11} - \frac{1}{\beta + \delta} A_{22}, \quad B_1 = A_{11},$$

$$(1.14) \quad B_2 = \frac{1}{\beta + \delta} A_{22}, \quad B_3 = \frac{1}{\sqrt{(\beta + \delta)(1 - \beta)}} A_{12},$$

$$(1.15) \quad B_4 = \frac{1}{\sqrt{(\beta + \delta)(1 - \beta)}} A_{21}.$$

Los generadores de $\mathcal{R}_0$ se pueden expresar en términos de los operadores B_j , por ello, el álgebra $\mathcal{R}_0$ está generada por los operadores de multiplicación por funciones continuas y los operadores B_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Considérese el operador

$$(1.16) \quad A = a_0 B_0 + a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + T \in \mathcal{R}_0,$$

donde T es un operador compacto y $a_j(\zeta) \in C(\overline{G})$, $j = 0, \dots, 4$.

Teorema 1.3 *Si el Jacobiano de α es mayor que cero y la función $\beta(\zeta)$ no se anula en la frontera de G , entonces el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}_0$ es isomorfa e isométrica a $C(\overline{G}) \times M_2(C(\partial G))$. El isomorfismo $\Phi : \hat{\mathcal{R}}_0 \rightarrow C(\overline{G}) \times M_2(C(\partial G))$ actúa del siguiente modo:*

$$\Phi(\hat{A}) = \left(a_0(\zeta), \begin{pmatrix} a_1(\zeta)|_{\partial G} & a_3(\zeta)|_{\partial G} \\ a_4(\zeta)|_{\partial G} & a_2(\zeta)|_{\partial G} \end{pmatrix} \right),$$

donde A es el operador definido en (1.16).

Corolario 1.3 *Un operador $A \in \mathcal{R}_0$ es de Fredholm si, y sólo si, $\Phi(\hat{A})$ es invertible, donde Φ es el homomorfismo enunciado en el Teorema 1.2 ó 1.3, según sea el caso.*

2 Descripción del álgebra $\mathcal{R} = \mathcal{R}(C(\overline{G})I; K, W)$

El álgebra de Calkin de $\mathcal{R}$ se describe utilizando también el principio local de Douglas-Varela. A diferencia de $\mathcal{R}_0$, se utiliza como subálgebra del centro de $\mathcal{R}/\mathcal{C}$ a $\pi(C_\alpha(\overline{G})I)$, donde $C_\alpha(\overline{G})$ es el espacio de funciones $f \in C(\overline{G})$ tales que $f = f \circ \alpha$. La construcción del álgebra local de $\mathcal{R}$, denotada por $\mathcal{R}[\zeta_0]$, es análoga a la construcción de $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$ [23, 27].

Considérese la proyección ortogonal

$$P = \frac{1}{2}(I + W).$$

Establezcamos la siguiente notación para las imágenes de los operadores I, K, W, P en el álgebra local $\mathcal{R}[\zeta_0]$:

$$e = \nu_{\zeta_0}(I), \quad k = \nu_{\zeta_0}(K), \quad w = \nu_{\zeta_0}(W) \quad \text{y} \quad p = \frac{1}{2}(e + w),$$

donde $\nu_{\zeta_0} = \pi_{\zeta_0} \circ \pi$.

Si ζ_0 no es punto fijo de α , entonces $\mathcal{R}[\zeta_0]$ está generada por las proyecciones ortogonales k, p y una tercera proyección ortogonal que es la imagen de un operador de multiplicación por una función continua tal que su valor en ζ_0 es 1 y su valor en $\alpha(\zeta_0)$ es 0. En este caso, la fibra $\mathcal{R}[\zeta_0]$ está descrita en el siguiente lema.

Lema 2.1 [27] *Si $\zeta_0 \in \overline{G}$ no es punto fijo de α , entonces el álgebra local $\mathcal{R}[\zeta_0]$ es isomorfa a*

$$\mathcal{R}_0(\zeta_0) \otimes M_2(\mathbb{C}),$$

donde $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$ es el álgebra local de $\mathcal{R}_0$ en el punto ζ_0 .

Con el fin de simplificar la descripción del álgebra de Calkin, se supone que el conjunto de puntos fijos F_α de α es nunca denso en $\overline{G}$, es decir, $\overline{G} \setminus F_\alpha = \overline{G}$.

La fibra $\mathcal{R}[\zeta_0]$ está generada por las proyecciones ortogonales k y p cuando ζ_0 es un punto fijo de α . Lo importante es que $\mathcal{R}[\zeta_0]$ es el límite de $\mathcal{R}[\zeta]$ cuando $\zeta \in \overline{G} \setminus F_\alpha$ tiende a ζ_0 (si $\zeta_0 \in \partial G$ entonces se toma el límite con $\zeta \in \partial G \setminus F_\alpha$). Así, el Lema 2.1 es también válido en este caso [29].

Al identificar $\mathcal{R}[\zeta_0]$ con $\mathcal{R}_0(\zeta_0) \otimes M_2(\mathbb{C})$ [27], las imágenes de los generadores de $\mathcal{R}$ en el álgebra local son las siguientes:

$$\nu_{\zeta_0}(a(\zeta)I) = \begin{pmatrix} a(\zeta_0)e & 0 \\ 0 & a(\alpha(\zeta_0))e \end{pmatrix},$$

$$k = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \quad y \quad w = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix},$$

donde p_1 y p_2 son las proyecciones ortogonales dadas en (1.4), y e es la identidad en $\mathcal{R}_0(\zeta_0)$.

Consideremos la matriz unitaria autoadjunta

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e & e \\ e & -e \end{pmatrix}$$

y el isomorfismo $\mu : \mathcal{R}_0(\zeta_0) \otimes M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{R}_0(\zeta_0) \otimes M_2(\mathbb{C})$ definido por $\mu(A) = UAU^*$. Entonces

$$(2.17) \quad \mu(\nu_{\zeta_0}(a(\zeta)I)) = \begin{pmatrix} a_+(\zeta_0)e & a_-(\zeta_0)e \\ a_-(\zeta_0)e & a_+(\zeta_0)e \end{pmatrix},$$

$$(2.18) \quad \mu(k) = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mu(w) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix},$$

donde

$$a_+ = \frac{1}{2}(a + a \circ \alpha), \quad a_- = \frac{1}{2}(a - a \circ \alpha), \quad r_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \quad y \quad r_2 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2).$$

Sustituyendo en (2.18) los valores de p_1 y p_2 , dados en (1.10), se obtienen los generadores de la fibra $\mathcal{R}[\zeta_0]$.

Sea

$$\mathcal{M}_\alpha = \{(x, t) : x \in \partial G, t = 1 \text{ si } \det J_\alpha < 0 \text{ y } t = \beta(x) \text{ si } \det J_\alpha > 0\}$$

y sea Ω el álgebra C^* que consiste de todas las matrices $\sigma = (\sigma', \sigma'') \in M_2(C(\overline{G})) \times M_4(C(\mathcal{M}_\alpha))$ con las siguientes propiedades:

- 1) la matriz $\sigma'(\zeta)$ es diagonal si $\zeta \in F_\alpha$,
- 2) $\sigma''(x, 0)$ es diagonal si $(x, 0) \in \mathcal{M}_\alpha$ y $x \in F_\alpha$,
- 3) $\sigma''(x, t)$ es diagonal por bloques 2×2 si $(x, t) \in \mathcal{M}_\alpha \cap (\partial G \times \{0, 1\})$,
- 4) si $\zeta = x \in \partial G$ y $(x, 0) \in \mathcal{M}_\alpha$, $\sigma'(\zeta) = \begin{pmatrix} \sigma''_{33}(x, 0) & \sigma''_{34}(x, 0) \\ \sigma''_{43}(x, 0) & \sigma''_{44}(x, 0) \end{pmatrix}$,
- 5) $(\sigma'(\zeta), \sigma''(x, t))$ y $(\sigma'(\alpha(\zeta)), \sigma''(\alpha(x), t))$ están relacionados como sigue

$$(\sigma'(\zeta), \sigma''(x, t)) = N (\sigma'(\alpha(\zeta)), \sigma''(\alpha(x), t)) N,$$

donde $N = N^* = N^{-1} = (N', N'')$,

$$N'(\zeta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y$$

$$N''(x, t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t} & 0 & i\sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-t} & 0 & -i\sqrt{t} \\ -i\sqrt{t} & 0 & -\sqrt{1-t} & 0 \\ 0 & i\sqrt{t} & 0 & \sqrt{1-t} \end{pmatrix}.$$

Normalizamos el álgebra Ω por

$$\|\sigma\| = \max\{\max_{\zeta \in \bar{G}} \|\sigma'(\zeta)\|, \max_{(x,t) \in \mathcal{M}_\alpha} \|\sigma''(x, t)\|\}$$

donde $\|\sigma''(x, t)\|^2 = \|\sigma'(\zeta)\|^2$ es el valor propio más grande de la matriz $\sigma''(x, t)\sigma''^*(x, t) = [\sigma'(\zeta)\sigma'^*(\zeta)]$.

Utilizando el principio local de Douglas-Varela [25] se obtiene la descripción de $\mathcal{R}$ en el siguiente

Teorema 2.1 *El álgebra de Calkin $\mathbf{Sym} \mathcal{R} = \mathcal{R}/\mathcal{C}$ es isomorfa e isométrica al álgebra Ω . Cuando ellas son identificadas, el homomorfismo*

$$\mathbf{sym} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{Sym} \mathcal{R}$$

está generado por la siguiente aplicación de los generadores de $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{sym} a(\zeta)I = (\sigma'_a, \sigma''_a), \quad \mathbf{sym} K = (\sigma'_K, \sigma''_K), \quad \mathbf{sym} W = (\sigma'_W, \sigma''_W),$$

donde

$$\sigma'_a(\zeta) = \begin{pmatrix} a_+(\zeta) & a_-(\zeta) \\ a_-(\zeta) & a_+(\zeta) \end{pmatrix},$$

$$\sigma_a''(x, t) = \begin{pmatrix} a_+(x) & a_-(x) & 0 & 0 \\ a_-(x) & a_+(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_+(x) & a_-(x) \\ 0 & 0 & a_-(x) & a_+(x) \end{pmatrix},$$

$$\text{con } a_+ = \frac{1}{2}(a + a \circ \alpha) \quad \text{y} \quad a_- = \frac{1}{2}(a - a \circ \alpha),$$

$$\sigma'_W(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma''_W(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma'_K(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\sigma''_K(x, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-t & t & i\sqrt{t(1-t)} & -i\sqrt{t(1-t)} \\ t & 2-t & -i\sqrt{t(1-t)} & i\sqrt{t(1-t)} \\ -i\sqrt{t(1-t)} & i\sqrt{t(1-t)} & t & -t \\ i\sqrt{t(1-t)} & -i\sqrt{t(1-t)} & -t & t \end{pmatrix}.$$

Nota 2.2 Cuando el Jacobiano de α es menor que cero, $t \in \{0, 1\}$. Por lo tanto, todas las matrices en Ω son diagonales por bloques 2×2 .

Corolario 2.2 Un operador $A \in \mathcal{R}$ es de Fredholm si, y sólo si, su símbolo es invertible, es decir,

$$\det \text{sym } A \neq 0.$$

3 El álgebra $\mathcal{R}_{KC} = \mathcal{R}(PC(\overline{G})I; K)$

N. L. Vasilevski estudió en [26] el álgebra generada por la proyección de Bergman y una clase de operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos en $\overline{G}$. En particular, se incluye al álgebra generada por la proyección de Bergman y los operadores de multiplicación por funciones continuas:

$$\mathcal{R}_{KC} = \mathcal{R}(C(\overline{G})I; K).$$

Esta álgebra contiene al ideal de operadores compactos ($\mathcal{C}$), y su álgebra de Calkin $\hat{\mathcal{R}}_{KC} := \mathcal{R}_{KC}/\mathcal{C}$ es isomorfa a $C(\bar{G}) \times C(\partial G)$ [26]. El isomorfismo

$$\Psi : \hat{\mathcal{R}}_{KC} \rightarrow C(\bar{G}) \times C(\partial G)$$

es el siguiente:

$$\Psi(a(z)(I - K) + b(z)K + T) = (a(z), b(z)|_{\partial G}),$$

donde T es cualquier operador compacto.

Teorema 3.1 [26] *Si el operador $A = a(\zeta)(I - K) + b(\zeta)K$ es de Fredholm, entonces*

$$\mathbf{Ind} A = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N [\arg a]_{\gamma_j} - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N [\arg b]_{\gamma_j}.$$

Lema 3.1 *Si $f(\zeta)$ y $g(\zeta)$ son funciones continuas en $\bar{G}$, analíticas en G y no se anulan, entonces el siguiente operador es invertible*

$$A = f(\zeta)(I - K) + g(\zeta)K.$$

Este lema se demuestra con ayuda del Teorema 3.1, aunque también puede demostrarse directamente.

Sea ζ_0 un punto de G y ζ_j un punto de la componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma_j$ ($j = 1, \dots, N$).

Consideremos al operador

$$\begin{aligned} A'_0 &= A_1 + (\zeta - \zeta_0)A_2 + A_3 \\ &= I - K + (\zeta - \zeta_0)K. \end{aligned}$$

Lema 3.2 *El operador A'_0 es de Fredholm y*

$$\mathbf{Ind} A'_0 = -1.$$

4 Índice de los operadores de Fredholm del álgebra $\mathcal{R}_0$

Grupo abstracto de índices de $\hat{\mathcal{R}}_0$

Sea $\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}$ el grupo de elementos invertibles de $\hat{\mathcal{R}}_0$ y $\mathbf{Fred} \mathcal{R}_0$ el semigrupo de operadores de Fredholm de $\mathcal{R}_0$. Un operador $A \in \mathcal{R}_0$ es de Fredholm

si, y sólo si, $\hat{A} \in \hat{\mathcal{R}}_0^{-1}$ [3]. La componente conexa de $\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}$ que contiene la identidad se denotará por $\hat{\mathcal{R}}_{00}^{-1}$.

El *grupo abstracto de índices* de $\hat{\mathcal{R}}_0$ es, por definición, el grupo discreto

$$\Lambda_{\hat{\mathcal{R}}_0} = \hat{\mathcal{R}}_0^{-1} / \hat{\mathcal{R}}_{00}^{-1},$$

y el *índice abstracto* de $\hat{\mathcal{R}}_0$ es el homomorfismo canónico

$$\mathbf{ind} : \hat{\mathcal{R}}_0^{-1} \rightarrow \Lambda_{\hat{\mathcal{R}}_0}.$$

El conjunto de componentes conexas de $\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}$ se denotará por $[\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}]$. De la teoría de grupos topológicos [5, 19] se sabe que estas componentes conexas coinciden con las clases laterales de $\hat{\mathcal{R}}_{00}^{-1}$, es decir, $[\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}] = \Lambda_{\hat{\mathcal{R}}_0}$.

Si $\mathcal{D}$ es una componente conexa de $\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}$, entonces todos los operadores en $\pi^{-1}(\mathcal{D})$ tienen el mismo índice (π es la proyección natural de $\mathcal{R}_0$ en $\hat{\mathcal{R}}_0$). Esta propiedad garantiza la existencia de un homomorfismo $\Xi : \Lambda_{\hat{\mathcal{R}}_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Fred} \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\pi} & \hat{\mathcal{R}}_0^{-1} & \xrightarrow{\mathbf{ind}} & \Lambda_{\hat{\mathcal{R}}_0} \\ & \searrow & & & \downarrow \Xi \\ & & & & \mathbb{Z} \\ & \nearrow & & & \\ & \mathbf{Ind} & & & \end{array}$$

donde **Ind** es la aplicación que determina el índice de cada operador de Fredholm.

De este modo, para calcular el índice de los operadores de Fredholm, en primer lugar se deben obtener las componentes conexas de $\hat{\mathcal{R}}_0$ y después se debe determinar la expresión que define al homomorfismo Ξ .

El caso $\det J_\alpha < 0$

En esta sección vamos a calcular el índice de los operadores de Fredholm de $\mathcal{R}_0$, cuando el Jacobiano de α es menor que cero. Con este objetivo, el procedimiento a seguir será el expuesto en la sección anterior.

En virtud del Teorema 1.2, el álgebra $\hat{\mathcal{R}}_0$ es isomorfa a $C(\bar{G}) \times [C(\partial G)]^2$. Por lo tanto, el grupo $\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}$ es isomorfo a $C(\bar{G})^{-1} \times [C(\partial G)^{-1}]^2$.

La frontera de G consta de $N + 1$ curvas cerradas simples, ajenas por pares; así, la clase de homotopía de una función $a \in C(\partial G)^{-1}$ está

caracterizada por el número de vueltas que da al origen la imagen de cada restricción $a|_{\gamma_j}$ ($j = 0, \dots, N$). Por otra parte, el dominio $\overline{G}$ es homotópicamente equivalente a la suspensión de $N + 1$ puntos (flor de N hojas), por lo tanto, la clase de homotopía de una función $a \in C(\overline{G})^{-1}$ está determinada por el número de vueltas que da al origen la imagen de cada restricción $a|_{\gamma_j}$ ($j = 1, \dots, N$). Es decir, el grupo fundamental $\pi_1(\gamma_j)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ [17]. Utilizando este hecho se concluye que

$$[\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}] \cong \mathbb{Z}^{3N+2}.$$

Identificando $\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}$ con $C(\overline{G})^{-1} \times [C(\partial G)^{-1}]^2$, el índice abstracto está dado por

$$\mathbf{ind} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto (\kappa_1, \dots, \kappa_N, \kappa'_0, \dots, \kappa'_N, \kappa''_0, \dots, \kappa''_N),$$

donde

$$(4.19) \quad \kappa_j = \frac{1}{2\pi} [\arg a_1]_{\gamma_j}, \quad \kappa'_j = \frac{1}{2\pi} [\arg a_2]_{\gamma_j}, \quad \kappa''_j = \frac{1}{2\pi} [\arg a_3]_{\gamma_j}.$$

Por el desarrollo realizado en la sección anterior, existe un homomorfismo $\Xi : [\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que el índice de cada operador $A \in \mathbf{Fred} \mathcal{R}_0$ está determinado por $(\Xi \circ \mathbf{ind} \circ \pi)(A)$. De la Sección 1 sabemos que A tiene la forma $A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + T$, donde T es un operador compacto, $a_j \in C(\overline{G})$ y A_1, A_2 y A_3 son los operadores definidos en (1.12).

Puesto que $[\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}] \cong \mathbb{Z}^{3N+2}$ y Ξ es lineal, existen constantes l_j, l'_j y l''_j tales que

$$(4.20) \quad \mathbf{Ind} A = \sum_{j=1}^N l_j \kappa_j + \sum_{j=0}^N l'_j \kappa'_j + \sum_{j=0}^N l''_j \kappa''_j.$$

Para determinar los valores de las constantes l_j, l'_j y l''_j , es necesario definir algunos operadores de Fredholm y calcular su índice.

Considérese el siguiente operador

$$(4.21) \quad A = a_1(\zeta)A_1 + a_2(\zeta)A_2 + a_3(\zeta)A_3 + T \in \mathcal{R}_0,$$

donde T es un operador compacto y $a_j \in C(\overline{G})$ ($j = 1, 2, 3$). Si A es un operador de Fredholm, entonces κ_j, κ'_j y κ''_j ($j = 0, \dots, N$) denotan los enteros definidos en (4.19).

Teorema 4.1 *Si el Jacobiano de α es menor que cero y A es un operador de Fredholm, entonces*

- 1) $\mathbf{ind} \hat{A} = (\kappa_1, \dots, \kappa_N, \kappa'_0, \dots, \kappa'_N, \kappa''_0, \dots, \kappa''_N)$,
- 2) $\mathbf{Ind} A = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N [\arg a_3]_{\gamma_j} - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N [\arg a_2]_{\gamma_j}$.

Demostración: Se ha visto que el índice de A está dado por una expresión del tipo (4.20), donde l_j, l'_j y l''_j son constantes por determinar. Se denota por $\sigma_1(A)$, $\sigma_2(A)$ y $\sigma_3(A)$ a la primera, segunda y tercera suma de la expresión (4.20), respectivamente. Como la función $a_1(\zeta)$ es continua en $\overline{G}$ y no se anula, el operador $a_1(\zeta)I = a_1(\zeta)A_1 + a_1(\zeta)A_2 + a_1(\zeta)A_3$ es invertible. Así

$$0 = \mathbf{Ind} a_1(\zeta)I = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N l_j [\arg a_1(\zeta)]_{\gamma_j} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N (l'_j + l''_j) [\arg a_1(\zeta)]_{\gamma_j},$$

y por lo tanto

$$\sigma_1(A) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N (l'_j + l''_j) [\arg a_1(\zeta)]_{\gamma_j}.$$

Si $j > 0$, por el Lema 3.1, el operador

$$A'_j = (I - K) + (\zeta - \zeta_j)K = A_1 + (\zeta - \zeta_j)A_2 + A_3$$

es invertible. De aquí que $0 = \mathbf{Ind} A'_j = \sigma_2(A'_j) = l'_0 - l'_j$ y

$$l'_j = l'_0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Por el Lema 3.2, el índice del operador $A'_0 = I - K + (\zeta - \zeta_0)K$ es igual a -1 . Así, de la igualdad $\mathbf{Ind} A'_0 = \sigma_2(A'_0) = l'_0$ se obtiene

$$(4.22) \quad l'_j = -1, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

En primer lugar supongamos que $\alpha(\gamma_0) = \gamma_0$. Como el Jacobiano de α es menor que cero, $\alpha(\zeta)$ recorre a $\alpha(\gamma_j)$ en el sentido negativo cuando ζ recorre a γ_j en el sentido positivo. Si $\alpha(\gamma_j) = \gamma_j$ y $j > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
(4.23) \quad 0 &= \mathbf{Ind} A'_j = \mathbf{Ind} W A'_j W \\
&= \mathbf{Ind} [A_1 + A_2 + (\alpha(\zeta) - \zeta_j) A_3] \\
&= \sigma_3(W A'_j W) = -l''_0 + l''_j.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $\alpha(\gamma_j) = \gamma_k$ ($j \neq k$), entonces

$$\begin{aligned}
(4.24) \quad 0 &= \mathbf{Ind} A'_j = \mathbf{Ind} W A'_j W = \sigma_3(W A'_j W) \\
&= -l''_0 + l''_k.
\end{aligned}$$

Un cálculo más muestra que

$$\begin{aligned}
(4.25) \quad \mathbf{Ind} A'_0 &= \mathbf{Ind} W A'_0 W \\
&= \sigma_3(W A'_0 W) = -l''_0.
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (4.23), (4.24) y (4.25) se deduce que

$$(4.26) \quad l''_j = -\mathbf{Ind} A'_0 = 1, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Ahora supongamos que $\alpha(\gamma_0) = \gamma_{k_0}$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $k_0 = 1$. Las igualdades (4.23) y (4.24) siguen siendo válidas si $j > 1$; no obstante

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{Ind} A'_1 = \mathbf{Ind} W A'_1 W \\
&= \sigma_3(W A'_1 W) = l''_0 - l''_1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ind} A'_0 &= \mathbf{Ind} W A'_0 W = \sigma_3(W A'_0 W) \\
&= -l''_1.
\end{aligned}$$

De estas dos ecuaciones se deduce que las igualdades (4.26) siguen siendo válidas. El teorema queda demostrado. ■.

El caso $\det J_\alpha > 0$

Ahora se procederá a calcular el índice de los operadores de Fredholm de $\mathcal{R}_0$, cuando que el Jacobiano de α es mayor que cero. Sean α_1 y α_2 la parte real e imaginaria de α , respectivamente. Un cálculo directo muestra que

$$\|J_\alpha\|_2^2 = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial y}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} = 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \bar{\zeta}} + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \zeta} \\
 &= 2(|a|^2 + |b|^2),
 \end{aligned}$$

donde $\zeta = x + iy$, $a = \partial \alpha / \partial \zeta$ y $b = \partial \alpha / \partial \bar{\zeta}$.

Análogamente se demuestra que $\det J_\alpha = |a|^2 - |b|^2$. Por lo tanto la función β , definida en (1.9), toma la forma

$$\beta(\zeta) = \left| \frac{b}{a} \right|^2.$$

Supongamos que $\beta(\zeta)$ no se anula en la frontera de G . Del Teorema 1.3 y un razonamiento análogo al efectuado en el caso $\det J_\alpha < 0$, se concluye que

$$[\hat{\mathcal{R}}_0^{-1}] \cong \mathbb{Z}^{2N+1}.$$

El índice abstracto está dado por

$$\mathbf{ind} : \left(a_0(\zeta), \begin{pmatrix} a_1(\zeta) & a_3(\zeta) \\ a_4(\zeta) & a_2(\zeta) \end{pmatrix} \right) \mapsto (\kappa_1, \dots, \kappa_N, \kappa'_0, \dots, \kappa'_N),$$

donde

$$(4.27) \quad \kappa_j = \frac{1}{2\pi} [\arg a_0]_{\gamma_j} \quad \text{y} \quad \kappa'_j = \frac{1}{2\pi} [\arg \{a_1 a_2 - a_3 a_4\}]_{\gamma_j}.$$

Del Teorema 1.3 se sabe que todo operador de $\mathcal{R}_0$ tiene la forma

$$(4.28) \quad A = a_0 B_0 + a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + T,$$

donde T es un operador compacto, $a_j(\zeta) \in C(\bar{G})$ ($j = 0, \dots, 4$) y los operadores B_j 's son aquellos definidos en (1.13), (1.14) y (1.15). Si A es un operador de Fredholm, los enteros κ_j y κ'_j ($j = 0, \dots, N$) se definen en (4.27).

Teorema 4.2 *Supongamos que el Jacobiano de α es mayor que cero y que la función $\beta(\zeta)$ no se anula en la frontera de G . Si A es un operador de Fredholm, entonces*

- 1) $\mathbf{ind} \hat{A} = (\kappa_1, \dots, \kappa_N, \kappa'_0, \dots, \kappa'_N),$
- 2) $\mathbf{Ind} A = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N [\arg a_0]_{\gamma_j} - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N [\arg \{a_1 a_2 - a_3 a_4\}]_{\gamma_j}.$

Demostración: Puesto que A es un operador de Fredholm, la función $a_0(\zeta)$ no se anula en $\overline{G}$, así, el operador a_0I es invertible. Esto implica que el índice de A es igual al índice del operador

$$A' = \frac{1}{a_0}A = B_0 + \frac{a_1}{a_0}B_1 + \frac{a_2}{a_0}B_2 + \frac{a_3}{a_0}B_3 + \frac{a_4}{a_0}B_4 + \frac{1}{a_0}T.$$

El operador

$$B = B_0 + \frac{a_1(\zeta)a_2(\zeta) - a_3(\zeta)a_4(\zeta)}{a_0^2}B_1 + B_2$$

tiene el mismo índice topológico que A' , esto es, $\mathbf{ind} \hat{A}' = \mathbf{ind} \hat{B}$. De este hecho se sigue que el índice de A es igual al índice de B . Utilizando la definición de los operadores B_j se obtiene

$$B = I - K + \frac{a_1(\zeta)a_2(\zeta) - a_3(\zeta)a_4(\zeta)}{a_0^2}K.$$

El índice de este operador se calcula utilizando el Corolario 3.1. ■

5 El álgebra $\mathcal{R}_0 \otimes M_2(\mathbb{C})$

Supongamos que el Jacobiano de α es mayor que cero y que $\beta(\zeta)$ no se anula en la frontera de G . En la Sección 6 se verá que para calcular el índice de los operadores de Fredholm del álgebra $\mathcal{R}$, es necesario calcular el índice de los operadores de Fredholm de $\mathcal{R}_0 \otimes M_2(\mathbb{C})$.

Sea $C = (C_{jk})_{j,k=1,2} \in \mathcal{R}_0 \otimes M_2(\mathbb{C})$. Del Teorema 1.3 se sabe que cada operador C_{jk} puede ser escrito en la forma

$$C_{kj} = a_{jk}^0 B_0 + a_{jk}^1 B_1 + a_{jk}^2 B_2 + a_{jk}^3 B_3 + a_{jk}^4 B_4 + T_{jk},$$

donde T_{jk} ($j, k = 1, 2$) es un operador compacto, $a_{jk}^n \in C(\overline{G})$ y los operadores B_j son los que están definidos en (1.13), (1.14) y (1.15).

Por el Teorema 1.3, el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}_0 \otimes M_2(\mathbb{C})$ es isomorfa al álgebra $M_2(C(\overline{G})) \times M_4(C(\partial G))$. Bajo esta identificación, la proyección canónica $\pi : \mathcal{R}_0 \otimes M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\hat{\mathcal{R}}_0)$ está dada por

$$\hat{C} = \pi(C) = \left((a_{jk}^0)_{j,k=1,2}, \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{11}^3 & a_{12}^1 & a_{12}^3 \\ a_{11}^4 & a_{11}^2 & a_{12}^4 & a_{12}^2 \\ a_{21}^1 & a_{21}^3 & a_{22}^1 & a_{22}^3 \\ a_{21}^4 & a_{21}^2 & a_{22}^4 & a_{22}^2 \end{pmatrix} \right).$$

La primera y segunda entrada de $\hat{C}$ se denotarán por M_0 y M_1 , respectivamente.

Teorema 5.1 *El operador C es de Fredholm si, y sólo si, $\hat{C}$ es invertible. En este caso*

$$\mathbf{Ind} C = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N [\arg \det M_0]_{\gamma_j} - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N [\arg \det M_1]_{\gamma_j}.$$

Demostración: Si C es un operador de Fredholm entonces $\hat{C}$ es homotópico al elemento

$$\hat{C}' = \left(\left(\begin{array}{cc} \det M_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} \det M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right).$$

Sea C' un operador de $\mathcal{R}_0 \otimes M_2(\mathbb{C})$ tal que $\pi(C') = \hat{C}'$. Obviamente C' es un operador de Fredholm y su índice es igual al índice del operador

$$C'_{11} = \det M_0 B_0 + \det M_1 B_1 + B_2 \in \mathcal{R}_0.$$

La afirmación del teorema se obtiene del Teorema 4.2. ■

6 Índice de los operadores de Fredholm del álgebra $\mathcal{R}$

Nueva descripción de $\hat{\mathcal{R}}$

Vimos que el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}_0$ se describe en dos casos: cuando el Jacobiano de α es menor que cero y cuando es mayor que cero. Esto mismo haremos con el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}$.

Consideremos el siguiente elemento

$$U = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \right).$$

Este elemento es unitario autoadjunto y se puede verificar fácilmente que

$$U(\mathbf{sym} a(\zeta)I)U^* = \mathbf{sym} a(\zeta)I, \quad U(\mathbf{sym} K)U^* = \mathbf{sym} K,$$

$$U(\mathbf{sym} WKW)U^* = \mathbf{sym} WKW, \quad U(\mathbf{sym} W)U^* = -\mathbf{sym} W.$$

Esto implica que $\nu_1 : \hat{\mathcal{R}} \ni \hat{A} \mapsto U\hat{A}U^* \in \hat{\mathcal{R}}$ es el automorfismo identidad cuando se restringe a $\hat{\mathcal{R}}_0$.

A menos que se especifique lo contrario, se identificará $\hat{A}$ con $\mathbf{sym} A$ si $A \in \mathcal{R}$, y $\hat{A}$ con $\Phi(\hat{A})$ si $A \in \mathcal{R}_0$.

Lema 6.1 *Todo operador del álgebra $\mathcal{R}$ tiene la forma*

$$A + BW,$$

donde A y B pertenecen al álgebra $\mathcal{R}_0$.

Demostración: Los generadores de $\mathcal{R}_0$ son los operadores de la forma

$$R = a(\zeta)I + b(\zeta)K + c(\zeta)WKW + T,$$

donde $a, b, c \in C(\overline{G})$ y T es un operador compacto. Un cálculo simple muestra que $RW = WR_W$, donde

$$R_W = a(\alpha(\zeta))I + b(\alpha(\zeta))WKW + c(\alpha(\zeta))K + WTW.$$

Sea C un elemento de $\mathcal{R}$. Se demostrará que existen operadores $A, B \in \mathcal{R}_0$ tales que $C = A + BW$. El conjunto de operadores de la forma $A + BW$, donde $A, B \in \mathcal{R}_0$, constituye un álgebra densa en $\mathcal{R}$. Por lo anterior existen sucesiones $\{A_n\}, \{B_n\}$ en $\mathcal{R}_0$ tales que

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n W).$$

Al aplicar en ambos lados de esta igualdad la proyección $\pi : \mathcal{R} \rightarrow \hat{\mathcal{R}}$ y el homomorfismo $\nu_1 \circ \pi$, se obtiene

$$\hat{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{A}_n + \hat{B}_n \hat{W}) \quad \text{y} \quad U\hat{C}U^* = \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{A}_n - \hat{B}_n \hat{W}).$$

Sea A un operador de $\mathcal{R}$ tal que $\hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{C} + U\hat{C}U^*)$. Puesto que $\hat{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{A}_n$, existe una sucesión de operadores compactos $\{T_n\}$ tal que $A = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + T_n)$. Esto demuestra que A está en $\mathcal{R}_0$.

Finalmente

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} ([A_n + T_n] + [B_n - T_n W]W) = A + BW,$$

donde $B = \lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - T_n W) \in \mathcal{R}_0$. ■

Sea ν_2 la composición

$$\hat{\mathcal{R}} \ni \hat{C} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{C} & 0 \\ 0 & \hat{C} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{C} & 0 \\ 0 & \nu_1(\hat{C}) \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{R}} \oplus \hat{\mathcal{R}};$$

y sea ν_3 la composición de homomorfismos inyectivos

$$\hat{\mathcal{R}} \ni \hat{C} \mapsto \nu_2(\hat{C}) \mapsto \hat{V}\nu_2(\hat{C})\hat{V}^* \in \hat{\mathcal{R}} \otimes M_2(\mathbb{C}),$$

donde

$$(6.29) \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ W & -W \end{pmatrix}.$$

Por el Lema 6.1, todo operador de $\mathcal{R}$ tiene la forma $C = A + BW$, donde $A, B \in \mathcal{R}_0$. Un cálculo directo demuestra que

$$(6.30) \quad \nu_3(\hat{C}) = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{W}\hat{B}\hat{W} & \hat{W}\hat{A}\hat{W} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que todas las entradas de este elemento pertenecen a $\hat{\mathcal{R}}_0$, por lo tanto, el álgebra $\hat{\mathcal{R}}$ es isomorfa a la subálgebra de $\hat{\mathcal{R}}_0 \otimes M_2(\mathbb{C})$ formada por todos los elementos del tipo (6.30).

El caso $\det J_\alpha < 0$

En esta sección supondremos que el Jacobiano de α es menor que cero. Del Lema 6.1 se sabe que todo operador de $\mathcal{R}$ puede ser representado en la forma

$$(6.31) \quad C = A + BW + T,$$

donde $A = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$, $B = b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3$, T es un operador compacto y los operadores A_j 's son los que están definidos en (1.12).

Cálculos directos demuestran que

$$\Phi(\hat{W}\hat{A}_1\hat{W}) = \Phi(\hat{A}_1), \quad \Phi(\hat{W}\hat{A}_2\hat{W}) = \Phi(\hat{A}_3), \quad \Phi(\hat{W}\hat{A}_3\hat{W}) = \Phi(\hat{A}_2).$$

Como $\hat{\mathcal{R}}_0 \cong C(\bar{G}) \times [C(\partial G)]^2$, el elemento dado en (6.30) puede ser identificado con la terna

$$(6.32) \quad \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 \circ \alpha & a_1 \circ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 \circ \alpha & a_3 \circ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 \circ \alpha & a_2 \circ \alpha \end{pmatrix} \right).$$

Sea Ω_1 la subálgebra de $M_2(C(\bar{G})) \times M_2(C(\partial G))$ que consiste de todos los elementos de la forma

$$(6.33) \quad \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 \circ \alpha & a_1 \circ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 \circ \alpha & a_3 \circ \alpha \end{pmatrix} \right),$$

donde $a_1, b_1 \in C(\bar{G})$ y $a_2, b_2, a_3, b_3 \in C(\partial G)$.

Teorema 6.1 *Si $\det J_\alpha < 0$, entonces el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}$ es isomorfa e isométrica al álgebra Ω_1 . Bajo esta identificación, el elemento dado en la expresión (6.33) es la imagen en el álgebra de Calkin del operador dado en (6.31).*

El operador C es de Fredholm si, y sólo si, $\pi(C)$ es invertible.

Demostración: Sea U la matriz unitaria autoadjunta $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y sea μ el automorfismo

$$M_2(C(\partial G)) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto U \begin{pmatrix} a \circ \alpha & b \circ \alpha \\ c \circ \alpha & d \circ \alpha \end{pmatrix} U^* \in M_2(C(\partial G)).$$

Aplicando el isomorfismo $I \oplus I \oplus \mu$ al elemento (6.32) se obtiene

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 \circ \alpha & a_1 \circ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 \circ \alpha & a_3 \circ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 \circ \alpha & a_3 \circ \alpha \end{pmatrix} \right).$$

La segunda y tercera entrada son iguales, por lo que se deduce inmediatamente el teorema. ■

Lema 6.2 *Si $A = a(\zeta)I + b(\zeta)W \in \mathcal{R}$ es un operador de Fredholm, entonces es invertible, con inverso*

$$A^{-1} = \frac{1}{a \ a \circ \alpha - b \ b \circ \alpha} (a \circ \alpha I - bW).$$

Demostración: Obsérvese que

$$A = aA_1 + aA_2 + aA_3 + (bA_1 + bA_2 + bA_3)W.$$

Puesto que A es de Fredholm, del Teorema 6.1 se infiere que

$$a(\zeta) \ a(\alpha(\zeta)) - b(\zeta) \ b(\alpha(\zeta)) \neq 0$$

para todo $\zeta \in \overline{G}$. Finalmente, un cálculo sencillo demuestra que el operador

$$\frac{1}{a \ a \circ \alpha - b \ b \circ \alpha} (a \circ \alpha I - bW)$$

es el inverso de A . ■

Sea $\mathcal{A}_1$ el álgebra de todas las matrices de la forma

$$(6.34) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b \circ \alpha & a \circ \alpha \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in C(\overline{G})$. Denotemos por $\mathcal{A}_2$ al álgebra $M_2(C(\partial G))$. Por el Teorema 6.1, el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}$ es isomorfa al álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Como es usual, el grupo de elementos invertibles de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}_j$) se denota por $\mathcal{A}^{-1}$ ($\mathcal{A}_j^{-1}$).

Teorema 6.2 *Si C es un operador de Fredholm, entonces*

$$\mathbf{Ind} C = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N [\arg\{a_1 a_1 \circ \alpha - b_1 b_1 \circ \alpha\}]_{\gamma_j} - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N [\arg(a_2 a_3 \circ \alpha - b_2 b_3 \circ \alpha)]_{\gamma_j}.$$

Demostración: La imagen de C en el álgebra de Calkin es el par de matrices (6.33). Para simplificar la notación, la primera matriz de $\hat{C}$ se denotará por M_1 y la segunda por M_2 .

Por el Lema 6.2 el operador C admite la factorización $C = C' C''$, donde $C' = a_1 I + b_1 W$ y $C'' = C'^{-1} C$. El índice de C es igual al índice de C'' y

$$\pi(C'') = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\det M_1} \begin{pmatrix} a_1 \circ \alpha & -b_1 \\ -b_1 \circ \alpha & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 \circ \alpha & a_3 \circ \alpha \end{pmatrix} \right).$$

Puesto que la primera entrada de $\pi(C'')$ es la matriz identidad, $\pi(C'')$ es homotópico a

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \det M_2 / \det M_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Este elemento es la imagen bajo π del operador

$$D = A_1 + \frac{\det M_2}{\det M_1} A_2 + A_3,$$

por esta razón

$$\begin{aligned} \mathbf{Ind} C &= \mathbf{Ind} D \\ &= \mathbf{Ind} (I - K) + \frac{\det M_2}{\det M_1} K \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N [\arg \det M_1^{-1} M_2] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N ([\arg \det M_1]_{\gamma_j} - [\arg \det M_2]_{\gamma_j}). \blacksquare \end{aligned}$$

El caso $\det J_\alpha > 0$

Para finalizar, supongamos que el Jacobiano de α es mayor que cero y que $\beta(\zeta)$ no se anula en la frontera de G . Es fácil demostrar que $\beta \circ \alpha = \beta$. Recordemos que δ es una función continua, idénticamente cero en la frontera de G y estrictamente positiva en G . Esta función se utilizó para definir los operadores B_j dados en (1.13), (1.14) y (1.15). Si δ no satisface la ecuación $\delta \circ \alpha = \delta$, la sustituimos por la función $(\delta + \delta \circ \alpha)/2$.

Considérese un operador C del álgebra $\mathcal{R}$ que, como se sabe del Lema 6.1, tiene la forma

$$(6.35) \quad C = A + BW + T,$$

donde

$$\begin{aligned} A &= a_0B_0 + a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 + a_4B_4, \\ B &= b_0B_0 + b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 + b_4B_4 \end{aligned}$$

y T es un operador compacto.

Sea V_1 la matriz unitaria autoadjunta

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1-\beta} & \sqrt{\beta} \\ \sqrt{\beta} & -\sqrt{1-\beta} \end{pmatrix}.$$

Efectuando los cálculos necesarios se obtiene que

$$\hat{W}\hat{K}\hat{W} = (1, V_1)\hat{K}(1, V_1^*),$$

por lo tanto

$$\hat{W}\hat{B}_0\hat{W} = \hat{B}_0,$$

$$\hat{W}\hat{B}_1\hat{W} = (1-\beta)\hat{B}_1 + \beta\hat{B}_2 + \sqrt{\beta(1-\beta)}(\hat{B}_3 + \hat{B}_4),$$

$$\hat{W}\hat{B}_2\hat{W} = \beta\hat{B}_1 + (1-\beta)\hat{B}_2 - \sqrt{\beta(1-\beta)}(\hat{B}_3 + \hat{B}_4),$$

$$\hat{W}\hat{B}_3\hat{W} = \sqrt{\beta(1-\beta)}(\hat{B}_1 - \hat{B}_2) + (\beta-1)\hat{B}_3 + \beta\hat{B}_4,$$

$$\hat{W}\hat{B}_4\hat{W} = \sqrt{\beta(1-\beta)}(\hat{B}_1 - \hat{B}_2) + \beta\hat{B}_3 + (\beta-1)\hat{B}_4.$$

Estas expresiones demuestran que

$$\hat{W}\hat{A}\hat{W} = \left(a_0 \circ \alpha, V_1 \begin{pmatrix} a_1 \circ \alpha & a_3 \circ \alpha \\ a_4 \circ \alpha & a_2 \circ \alpha \end{pmatrix} V_1^* \right).$$

Usando esta igualdad, la fórmula (6.30) y la identificación de $\hat{\mathcal{R}}_0$ dada en el Teorema 1.3, se infiere que $\nu_3(\hat{C})$ es igual a

$$(6.36) \quad (M_0, M_1) = \left(\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 \circ \alpha & a_0 \circ \alpha \end{pmatrix}, M_1 \right),$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_4 & a_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_4 & b_2 \end{pmatrix} \\ V_1 \begin{pmatrix} b_1 \circ \alpha & b_3 \circ \alpha \\ b_4 \circ \alpha & b_2 \circ \alpha \end{pmatrix} V_1^* & V_1 \begin{pmatrix} a_1 \circ \alpha & a_3 \circ \alpha \\ a_4 \circ \alpha & a_2 \circ \alpha \end{pmatrix} V_1^* \end{pmatrix}.$$

Sea Ω_2 el álgebra de todos los elementos de la forma (6.36).

Teorema 6.3 *Supongamos que $\det J_\alpha > 0$ y que $\beta(\zeta) > 0$ para todo $\zeta \in \partial G$. El álgebra $\hat{\mathcal{R}}$ es isomorfa e isométrica al álgebra Ω_2 . Bajo esta identificación, el elemento dado en la expresión (6.36) es la imagen en el álgebra de Calkin del operador C . Este operador es de Fredholm si, y sólo si, $\pi(C)$ es invertible.*

Lema 6.3 *Si $A = a(\zeta)I + b(\zeta)W \in \mathcal{R}$ es un operador de Fredholm, entonces es invertible, con inverso*

$$A^{-1} = \frac{1}{a \circ \alpha - b \circ \alpha} (a \circ \alpha I - bW).$$

Lema 6.4 *Si $\zeta_0 \in \partial G$ es un punto fijo de α y $\det J_\alpha > 0$ entonces $\beta(\zeta_0) = 0$, donde β es la función definida en (1.9).*

Demostración: Puesto que $\alpha \circ \alpha = \text{id}_{\bar{G}}$, $\forall \zeta \in \bar{G}$ se cumple la igualdad $J_\alpha(\zeta)J_\alpha(\alpha(\zeta)) = I$.

Supongamos que $\zeta \in \partial G$ es un punto fijo de α . Entonces $J_\alpha(\zeta)J_\alpha(\zeta) = I$ y $\det J_\alpha(\zeta) = 1$ implican que

$$J_\alpha(\zeta) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad k^2 = 1.$$

Luego

$$\beta(\zeta) = \frac{\|J_\alpha\|_2^2 - 2 \det J_\alpha}{\|J_\alpha\|_2^2 + 2 \det J_\alpha} = 0. \quad \blacksquare$$

Puesto que $\beta(\zeta) > 0$ para todo $\zeta \in \partial G$, el Lema 6.4 garantiza que α no tiene puntos fijos en ∂G . Así, la función $d(\zeta) = \alpha(\zeta) - \zeta$ no se anula en ∂G y el operador $D = B_0 + d(\zeta)(B_1 + B_2)$ es de Fredholm. Se puede verificar fácilmente que

$$(6.37) \quad \pi(D) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d(\zeta) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right).$$

Cualquier regularizador de D tiene la forma

$$D_r = B_0 + d_r(\zeta)(B_1 + B_2),$$

donde d_r es una función continua en $\bar{G}$ tal que $d_r|_{\partial G} = \frac{1}{d|_{\partial G}}$.

Consideremos el operador C , dado en (6.35), y supongamos que $a_0 = 1$ y $b_0 = 0$, es decir, $M_0 = I$. Es inmediato que

$$\pi(C) = \nu_1(\pi(C)) = \pi(D)\pi(C)\pi(D_r) = \pi(DCD_r).$$

Esta propiedad implica que los operadores

$$A + BW + T \quad \text{y} \quad A - BW + T$$

tienen el mismo índice cuando $a_0 = 1$ y $b_0 = 0$.

Teorema 6.4 *Si C es un operador de Fredholm, entonces*

$$\mathbf{Ind} C = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N [\arg\{a_0 a_0 \circ \alpha - b_0 b_0 \circ \alpha\}]_{\gamma_j} - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^N [\arg \det M_1]_{\gamma_j}.$$

Demostración: En primer lugar supongamos que $a_0 = 1$ y $b_0 = 0$. Los operadores $A + BW + T$ y $A - BW + T$ tienen el mismo índice, por ello,

$$\begin{aligned} \mathbf{Ind} C &= \frac{1}{2} \mathbf{Ind} V \begin{pmatrix} A + BW + T & 0 \\ 0 & A - BW + T \end{pmatrix} V^* \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{Ind} \begin{pmatrix} A + T & B \\ WBW & WAW + WTW \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde V es el operador (6.29). El índice se obtiene utilizando el Teorema 5.1.

Consideremos ahora el caso general. Por el Lema 6.3, se tiene que el operador $C' = a_0I + b_0W$ es invertible, por lo tanto, el operador C admite la factorización $C = C'C''$, donde $C'' = C'^{-1}C$.

El índice de C es igual al índice de C'' . La primera entrada del símbolo de este operador es la matriz identidad, y el determinante de la segunda entrada de $\pi(C')$ es igual a $\det M_1/(\det M_0)^2$. Por la primera parte de la demostración se obtiene

$$\mathbf{Ind} C = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^N ([\arg \det M_1]_{\gamma_j} - 2[\arg \det M_0]_{\gamma_j}). \blacksquare$$

El procedimiento para describir el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}$, cuando $\beta(\zeta)$ se anula en algunos puntos de la frontera de G , es similar al procedimiento efectuado cuando $\beta(\zeta)$ no se anula en ∂G . Sin embargo, el cálculo del índice de los operadores de Fredholm queda como un problema abierto.

7 Ejemplos

Ejemplo 1. Sea $G = \mathbb{D}$ el disco unitario y α la aplicación de conjugación. El Jacobiano de α es igual a -1 y el operador de translación inducido por α está definido por la regla de correspondencia $(W\varphi)(z) = \varphi(\bar{z})$. Además

$$(K\varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(\zeta)}{(1 - z\bar{\zeta})^2} d\zeta$$

y

$$(WKW\varphi)(z) = (\bar{K}\varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(\zeta)}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} d\zeta,$$

donde K es la proyección de Bergman del disco unitario.

Por el Teorema 1.2, el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(C(\overline{\mathbb{D}})I, K, \bar{K})$ es isomorfa a $C(\overline{\mathbb{D}}) \times C(\mathbb{T})^2$ y todo operador de $\mathcal{R}_0$ tiene la forma

$$(7.38) \quad A = a(z)I + b(z)K + c(z)\bar{K} + T,$$

donde $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$, T es un operador compacto y $a, b, c \in C(\overline{\mathbb{D}})$.

Por el Corolario 1.3, el operador A es de Fredholm si, y sólo si,

$$a(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad a(z) + b(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{T} \quad \text{y} \quad a(z) + c(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{T}.$$

Si este es el caso, el Teorema 4.1 implica que

$$\mathbf{Ind} A = \frac{1}{2\pi} [\arg (a(z) + c(z))]_{\mathbb{T}} - \frac{1}{2\pi} [\arg (a(z) + b(z))]_{\mathbb{T}}.$$

A. Dzhuraev [10] estudió los operadores de la forma (7.38) y ahora se está añadiendo el operador de translación W . El Lema 6.1 garantiza que todo operador del álgebra $\mathcal{R}(C(\mathbb{D})I, K, W)$ tiene la forma

$$A = a(z)I + b(z)K + c(z)\overline{K} + [f(z)I + g(z)K + h(z)\overline{K}]W + T.$$

Por el Teorema 6.1, este operador es de Fredholm si, y sólo si,

$$a(z)a(\alpha(z)) - f(z)f(\alpha(z)) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}}$$

y

$$a_2(z)a_3(\alpha(z)) - b_2(z)b_3(\alpha(z)) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{T},$$

donde $a_2 = a + b$, $a_3 = a + c$, $b_2 = f + g$ y $b_3 = f + h$. Si A es un operador de Fredholm, entonces el Teorema 6.2 justifica que

$$\mathbf{Ind} A = -\frac{1}{2\pi} [\arg \{a_2(z)a_3(\alpha(z)) - b_2(z)b_3(\alpha(z))\}]_{\mathbb{T}}.$$

Ejemplo 2. Sea G el anillo con centro en el origen, radio interior $a > 0$ y radio exterior b . Sea $f(t) : [a, b] \rightarrow [a, b]$ de clase C^2 con derivada menor que cero. Si $f \circ f = \text{id}_{[a,b]}$, entonces

$$\alpha(z) = f(|z|) \frac{\bar{z}}{|z|}$$

es un difeomorfismo en G , de clase C^2 , que satisface la condición de Carleman $\alpha \circ \alpha = \text{id}_{\overline{G}}$. Sea K la proyección de Bergman de G y sea W el operador de translación inducido por el difeomorfismo α .

Un cálculo directo y tedioso muestra que

$$\det J_{\alpha}(z) = -f(|z|)f'(|z|)/|z| > 0$$

y

$$\|J_{\alpha}(z)\|_2^2 = [f(|z|)]^2/|z|^2 + [f'(|z|)]^2.$$

Así la función $\beta(z)$, definida en (1.9), toma la forma

$$(7.39) \quad \beta(z) = \left(\frac{f(|z|) + |z|f'(|z|)}{f(|z|) - |z|f'(|z|)} \right)^2.$$

Demostraremos esto por otro medio. En la Sección 4 se mostró que $\beta(z) = |b/a|^2$, donde $a = \partial\alpha/\partial z$ y $b = \partial\alpha/\partial\bar{z}$. Así

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\alpha}{\partial z} &= \frac{\partial f(|z|)}{\partial z} \frac{\bar{z}}{|z|} + f(|z|) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{z}}{|z|} \right) \\
 &= f'(|z|) \frac{\partial|z|}{\partial z} \frac{\bar{z}}{|z|} + \frac{f(|z|)}{|z|^2} \left(-\bar{z} \frac{\partial|z|}{\partial z} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} \left(f'(|z|) - \frac{f(|z|)}{|z|} \right).
 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(f'(|z|) + \frac{f(|z|)}{|z|} \right).$$

El ejemplo más sencillo se obtiene cuando $f(t) = a + b - t$. En este caso $\alpha = C \circ H$, donde $C(z) = \bar{z}$ y H es la aplicación de simetría con respecto a la circunferencia de radio $(a + b)/2$ y centro en el origen. Puesto que $f'(t) = -1$,

$$\beta \left(a \frac{z}{|z|} \right) = \beta \left(b \frac{z}{|z|} \right) = \left(\frac{a - b}{a + b} \right)^2.$$

Por el Teorema 1.1, el espectro local de $K - WKW$ está dado por la igualdad

$$(7.40) \quad \text{sp}(\pi_{\zeta_0}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})) = \left\{ 0, \pm \frac{b - a}{b + a} \right\}, \quad \zeta_0 \in \partial G.$$

Si se desea que $(b - a)/(b + a)$ tome el valor $r \in (0, 1)$, entonces a y b deben satisfacer la ecuación $a/b = (1 - r)/(1 + r)$.

El espectro local de $K - WKW$ es el mismo en todos los puntos de la frontera de G . El Teorema 1.3 garantiza que el álgebra de Calkin de $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(C(\bar{G})I, K, WKW)$ es isomorfa a $C(\bar{G}) \times C(S^a)^2 \times C(S^b)^2$, donde S^r es la circunferencia con centro en el origen y radio r .

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a los doctores Nikolai L. Vasilevski y Enrique Ramírez de Arellano quienes hicieron posible la realización de este trabajo que, bajo su dirección, forma parte de la tesis doctoral.

Josué Ramírez Ortega
 Departamento de Matemáticas
 CINVESTAV-IPN
 A. P. 14-740
 México D.F. 07000
 México
 josue@math.cinvestav.mx

Referencias

- [1] S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*. Second, revised edition. Mathematical Surveys, No. V. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
- [2] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. 88 (1952), 85-139.
- [3] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 96. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [4] J. Dixmier, *C^* -Algebras*. North-Holland Mathematical Library, Vol. 15. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977.
- [5] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 49. Academic Press, New York-London, 1972.
- [6] M. J. Dupré, *The classification and structure of C^* -algebra bundles*, Mem. Amer. Math. Soc. 222, Vol. 21 (1979), 1-77.
- [7] M. J. Dupré and R. M. Gillette, *Banach Bundles, Banach Modules and Automorphisms of C^* -Algebras*. Research Notes in Mathematics, 92. Pitman Publishing Inc., Boston, Mass-London, 1983.
- [8] A. Dzhuraev, *On a method of investigating singular integral equations in a plane bounded region*, Soviet Math. Dokl. 2, Vol. 12 (1971), 653-657.
- [9] A. Dzhuraev, *The effect of the regular part in singular integral equations in a two-dimensional bounded region*, Soviet Math. Dokl. 3, Vol. 12 (1971), 710-713.
- [10] A. Dzhuraev, *On the theory of systems of singular integral equations over a bounded plane domain*, Soviet Math. Dokl. 6, Vol. 20 (1979), 1178-1182.
- [11] A. Dzhuraev, *On a class of systems of singular integral equations on a bounded region*, Proceedings of the Royal Society of Edinburg, 83A. (1979), 347-364.
- [12] A. Dzhuraev, *Methods of Singular Integral Equations*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 60. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in USA with John Wiley & Sons, Inc. New York, 1992.
- [13] J. M. G. Fell, *The structure of algebras of operator fields*, Acta Math. 106 (1961), 233-280.
- [14] J. M. G. Fell, *An Extension of Mackey's Method to Banach $*$ -Algebraic Bundles*. Mem. Amer. Math. Soc. 90, 1969.
- [15] F. D. Gájov, *Problemas de Contorno*. Mir, Moscú, 1980.
- [16] I. Gohberg and N. Krupnik, *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations Vol. 1, Introduction*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.

- [17] B. Gray, *Homotopy Theory, An Introduction to Algebraic Topology*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 64. Academic Press, New York-London, 1975.
- [18] K. H. Hofman, *Representations of algebras by continuous sections*, Bull. Amer. Math. Soc. 3, Vol. 78, 1972.
- [19] T. Husain, *Introduction to Topological Groups*. W. B. Saunders Co., Philadelphia, Paris-London, 1966.
- [20] F. Krauss and T. C. Lawson, *Examples of homogeneous C^* -algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 148, 1974.
- [21] V. G. Kravchenko and G. S. Litvinchuk, *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift*. Mathematics and its Applications, 289. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.
- [22] S. G. Mikhlin and S. Prössdorf, *Singular Integral Operators*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1986.
- [23] J. Ramírez, *Álgebra generada por la proyección de Bergman y un operador de translación*, Morfismos, Vol. 1, No. 1 (1997), 47-67.
- [24] I. M. Spitkovski and N. L. Vasilevski, *On an algebra generated by two projectors* (Russiam. English summary), Dokl. Akad. Nauk Ukrain SSR 8 Ser. A (1981), 10-13 (en ruso).
- [25] J. Varela, *Duality of C^* -algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 148 (1974), 97-108.
- [26] N. L. Vasilevski, *Banach algebras produced by two-dimensional integral operators with a Bergman kernel and piecewise continuous coefficients I (II)*, Izvestiya VUZ. Matematika 2 (3), Vol. 30 (1986), 12-21 (33-38).
- [27] N. L. Vasilevski, *On an algebra generated by abstract singular operators and a shift operator*, Math. Nachr. 162 (1993), 89-108.
- [28] N. L. Vasilevski, *On an algebra generated by two-dimensional singular integral operators in plane domains*, Complex Variables Theory Appl., Vol. 26 (1994), 79-91.
- [29] N. B. Vasilyev, *C^* -algebras with finite-dimensional irreducible representations*, Russian Mathematical Surveys, Vol. XXI (1966), 137-155.
- [30] I. N. Vekua, *Generalized Analytic Functions*. Pergamon Press, London-Paris-Frankfurt; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1962.