Morfismos, Vol. 2, No. 2, 1998, pp. 49–65

Adoquinado de cuadrados con trominós rectos y de cubos con tricubos rectos

Francisco Javier Zaragoza Martínez [1]

Resumen

Sea n un entero positivo. En este artículo se prueba que para todo cuadrado de lado n ($n \neq 3, 5$) existe un adoquinado libre de fallas con trominós rectos. También se prueba que todo cubo de lado n se puede adoquinar con tricubos rectos. Estos resultados extienden los obtenidos por Golomb en 1954 y por Chu y Johnsonbaugh en 1986.

1991 Mathematics Subject Clasification: 05B50, 52C20, 52C22
Keywords and phrases: Adoquinado, libre de fallas, policubo, poliominó, tricubo recto, trominó recto

1 Introducción

Considere una cuadrícula infinita formada por cuadrados unitarios. Un conjunto de N ($N \geq 1$) cuadrados unitarios tomados de esa cuadrícula tales que son conexos por los lados recibe el nombre de N-ominó. Un *poliominó* es un N-ominó para alguna N.

No distinguiremos entre N-ominós congruentes, así que sólo hay un 1-ominó (llamado *monominó*), un 2-ominó (llamado *dominó*), dos 3-ominós (llamados *trominó lineal* y *trominó recto*), cinco 4-ominós (llamados *tetrominós*), etc.

Diremos que un M-ominó $\mathcal{M}$ se puede *adoquinar* con el N-ominó $\mathcal{N}$ si para cualquier subconjunto $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$, con $|\mathcal{V}| = M \bmod N$, podemos cubrir todos los cuadrados unitarios en $\mathcal{M} \setminus \mathcal{V}$ con exactamente

[1]Profesor Asociado en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco, Departamento de Sistemas, Area de Sistemas Computacionales. Estudiante de Doctorado en la Universidad de Waterloo, Facultad de Matemáticas, Departamento de Combinatoria y Optimización.

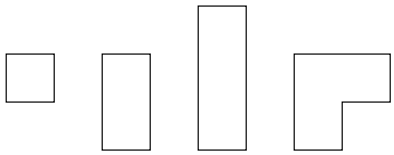


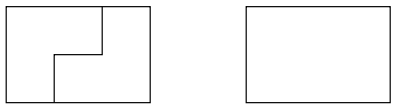
Figura 1: Los N-ominós con $N \leq 3$

$[M/N]$ poliominós congruentes con el N-ominó $\mathcal{N}$. A una elección de $\mathcal{V}$ junto con el respectivo recubrimiento con poliominós $\mathcal{N}$ la llamaremos *configuración*.

Es decir, $\mathcal{M}$ se puede adoquinar con $\mathcal{N}$ si podemos colocar copias de $\mathcal{N}$ de modo que, sin importar donde hayamos elegido los cuadrados unitarios vacantes $\mathcal{V}$, cada uno de los cuadrados unitarios de $\mathcal{M}$ que no están en $\mathcal{V}$ queda cubierto exactamente una vez por cuadrados unitarios de alguna copia de $\mathcal{N}$.

A partir de este momento, reduciremos nuestra atención al caso en el que $\mathcal{M}$ es un cuadrado de lado n (es decir, uno de los n^2-ominós) y $\mathcal{N}$ es el trominó recto (al cual llamaremos simplemente *trominó*). En este supuesto $|\mathcal{V}|$ sólo puede tomar los valores $0, 1$ dependiendo sólo de si n es un múltiplo de 3 o no. Cuando $|\mathcal{V}| = 1$ llamaremos a su único elemento el *cuadrado vacante*.

Además, para simplificar las figuras, cada vez que hayamos mostrado como adoquinar un M-ominó, usaremos libremente la configuración correspondiente. Por ejemplo, un rectángulo de 2×3, al que llamaremos *bloque*, se puede adoquinar como en (a), pero siempre se mostrará como en (b).



(a) (b)

Figura 2: El bloque de 2×3

En 1954 Golomb [5] demostró que todo cuadrado de lado $n = 2^k$ se puede adoquinar con trominós. Notemos que en este caso $|\mathcal{V}| = 1$.

La prueba se sigue por inducción en k: para $k = 0$ tenemos un cuadrado de lado 1 que se adoquina de forma trivial (pues en este caso sólo aparece el cuadrado vacante). Supongamos que se puede adoquinar

el cuadrado de lado $n = 2^k$ para alguna $k \geq 0$. Considere ahora un cuadrado de lado $2n = 2^{k+1}$. Podemos girar este cuadrado de modo que el cuadrado vacante se encuentre en el cuadrado de lado $n = 2^k$ en la esquina superior izquierda. Entonces podemos adoquinar el cuadrado de lado $2n$ con la siguiente construcción:

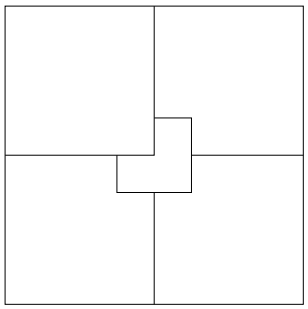


Figura 3: Adoquinado de un cuadrado de lado 2^{k+1}

En 1986 Chu y Johnsonbaugh [3] demostraron que todo cuadrado de lado n tal que $n \neq 5$ y n no es múltiplo de 3 se puede adoquinar con trominós. También demostraron que todo cuadrado de lado $n = 6k$ se puede adoquinar con trominós.

Se pueden encontrar otros resultados sobre adoquinamiento con poliominós congruentes en [4, 6, 7, 8, 9, 10].

La sección 2 contiene una demostración de que todo cuadrado de lado n tal que $n \neq 3, 5$ se puede adoquinar con trominós (teorema 2.3.7), completando los resultados presentados en [5] y [3]. En esta misma sección se introduce el concepto de adoquinado libre de fallas y se presentan adoquinados libres de fallas para el mismo conjunto de cuadrados (teorema 2.4.1).

En la sección 3 se presenta una generalización de la definición de adoquinado para objetos tridimensionales y se demuestra que todos los cubos de lado entero se pueden adoquinar con las versiones tridimensionales de los trominós, llamadas tricubos (teorema 3.2.4).

Finalmente, en la sección 4 se enumeran algunas posibles extensiones a los resultados obtenidos en el presente trabajo.

2 Adoquinado de cuadrados

2.1 Cuadrados de lado $n \leq 4$

Como ya mencionamos anteriormente, el cuadrado de lado 1 se adoquina de forma trivial. Los adoquinados para cuadrados de lados 2 y 4 se obtienen de la demostración de Golomb.

El cuadrado de lado 3 no se puede adoquinar: al menos una de las cuatro esquinas se tiene que cubrir con un trominó de modo que cubra al cuadrado central, obligando la posición de un segundo trominó y dejando sin cubrir tres cuadrados.

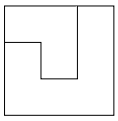


Figura 4: Cuadrado de lado 3

2.2 Cuadrado de lado $n = 5$

El cuadrado de lado 5 tiene 6 posiciones distintas en las que puede quedar el cuadrado vacante, salvo simetrías.

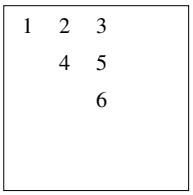


Figura 5: Cuadrado de lado 5

Primero presentaremos configuraciones para las posiciones $1, 3$ y 6.

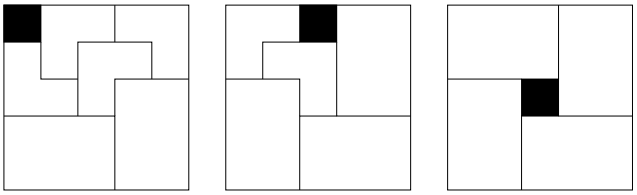


Figura 6: Configuraciones 1, 3 y 6 del cuadrado de lado 5

Cuando el cuadrado vacante está en la posición 5 no existe ninguna configuración pues la posición de un trominó queda obligada y después no se puede cubrir el cuadrado indicado con un *.

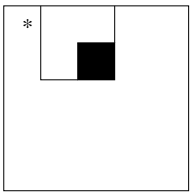


Figura 7: La posición 5

Cuando el cuadrado vacante está en alguna de las posiciones 2 ó 4 entonces la posición de un trominó queda obligada, de modo que se cubren los cuatro cuadrados sombreados. Para cubrir el cuadrado indicado con un * tenemos dos opciones. En la primera, se coloca un trominó como en (a), lo que hace imposible llenar el cuadrado marcado con un ?. En la segunda, se colocan bloques como en (b), pero queda un cuadrado de lado 3 que ya sabemos no se puede adoquinar. Así que tampoco existen configuraciones para ninguna de estas dos posiciones.

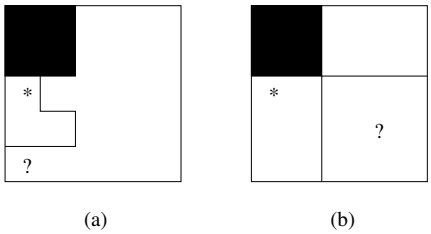


Figura 8: Las posiciones 2 y 4

Finalmente, el cuadrado de lado 5 no se puede adoquinar.

2.3 Cuadrados de lado $n \geq 6$

Lema 2.3.1 *Sea $k \geq 0$ un entero tal que se puede adoquinar el cuadrado de lado $3k+2$, entonces se puede adoquinar el cuadrado de lado $3k+4$.*

Demostración: El cuadrado de lado $3k+4$ se puede girar de modo que el cuadrado vacante quede en el cuadrado de lado $3k+2$ en la esquina superior izquierda. Por la hipótesis del lema este cuadrado

se puede adoquinar. El resto del cuadrado de lado $3k + 4$ se puede adoquinar con la configuración siguiente:

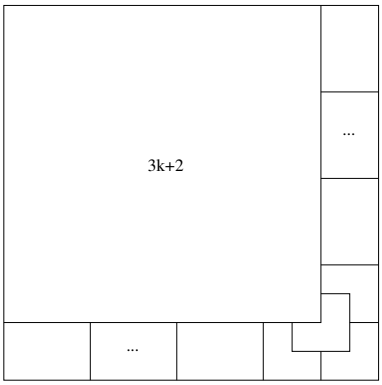


Figura 9: Configuración para el cuadrado de lado $3k + 4$

Lema 2.3.2 *Sea k un natural tal que se puede adoquinar el cuadrado de lado $3k + 1$, entonces se puede adoquinar el cuadrado de lado $3k + 5$.*

Demostración: El cuadrado de lado $3k + 5$ se puede girar de modo que el cuadrado vacante quede en el cuadrado de lado $3k + 1$ en la esquina superior izquierda. Por la hipótesis del lema este cuadrado se puede adoquinar. El resto del cuadrado de lado $3k + 5$ se puede adoquinar con la configuración siguiente:

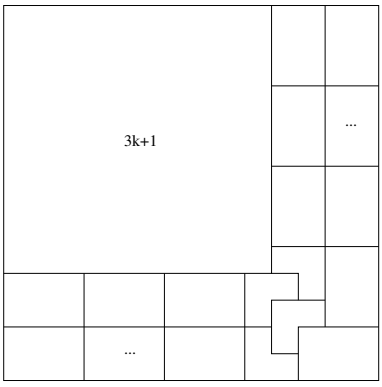


Figura 10: Configuración para el cuadrado de lado $3k + 5$

La siguiente proposición aparece en [3]. La demostración que presentamos en este artículo es distinta.

Proposición 2.3.3 *Sea $n \neq 5$ un natural que no es múltiplo de 3, entonces se puede adoquinar el cuadrado de lado n.*

Demostración: La prueba se hará por inducción. Los casos $n = 1, 2$ los hemos revisado anteriormente. Comenzando con $n = 2$ y aplicando de manera alternada los lemas 2.3.1 y 2.3.2, en ese orden, obtenemos una prueba para los naturales de la forma $n = 6k \pm 2$. Para los naturales de la forma $n = 6k \pm 1$ debemos comenzar con $n = 7$.

El cuadrado de lado 7 tiene 10 posiciones distintas en las que puede quedar el cuadrado vacante, salvo simetrías. La siguiente figura muestra configuraciones para todos estos casos:

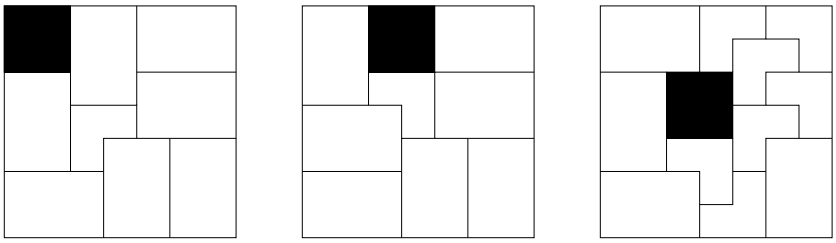


Figura 11: Cuadrado de lado 7

Note que cada una de las configuraciones anteriores sirve para 3, 4 y 3 de los 10 casos, respectivamente, dejando como cuadrado vacante cualquiera de los sombreados.

Ahora, comenzando con $n = 7$ y aplicando de manera alternada los lemas 2.3.2 y 2.3.1, en ese orden, obtenemos una prueba para los naturales de la forma $n = 6k \pm 1$, con $n \geq 7$. Con esto terminamos la prueba. □

A continuación probaremos que todos los cuadrados de lado $n > 3$, con n múltiplo de 3, se pueden adoquinar. Es más, mostraremos configuraciones en las cuales existe un bloque en posición vertical en la esquina inferior derecha.

En los siguientes dos lemas supondremos que el cuadrado de lado menor posee tal bloque y mostraremos una configuración para el cuadrado de lado mayor que también incluya un bloque con la característica pedida, aún cuando no lo digamos explícitamente.

Lema 2.3.4 *Si se puede adoquinar el cuadrado de lado $6k$, entonces se puede adoquinar el cuadrado de lado $6k+3$.*

Demostración: Tomemos una configuración para el cuadrado de lado $6k$ y removamos el bloque de la esquina inferior derecha. La configuración para el cuadrado de lado $6k+3$ se puede terminar como sigue:

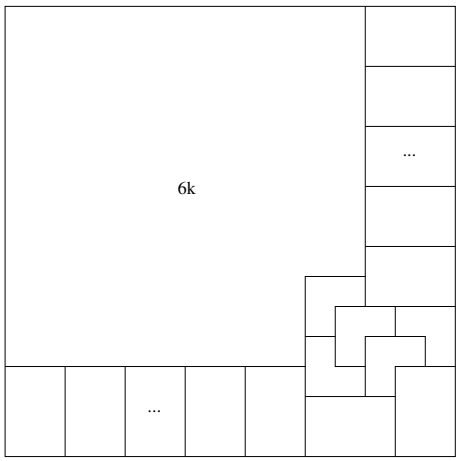


Figura 12: Cuadrado de lado $6k+3$

Lema 2.3.5 *Si se puede adoquinar el cuadrado de lado* $6k-3$*, entonces se puede adoquinar el cuadrado de lado* $6k$*.*

Demostración: Tomemos una configuración para el cuadrado de lado $6k-3$ y removamos el bloque de la esquina inferior derecha. La configuración para el cuadrado de lado $6k$ se puede terminar como sigue:

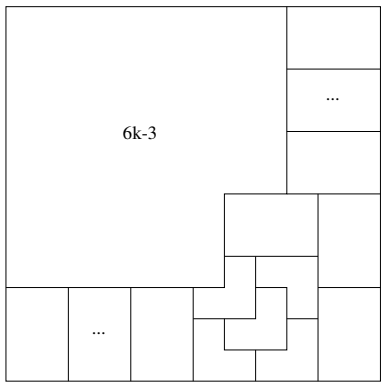


Figura 13: Cuadrado de lado $6k$

Proposición 2.3.6 *Sea $n \neq 3$ un múltiplo de 3, entonces se puede adoquinar el cuadrado de lado n.*

Demostración: La prueba se hará por inducción. El cuadrado de lado 6 se puede adoquinar con la siguiente configuración, la cual posee un bloque en posición vertical en la esquina inferior derecha:

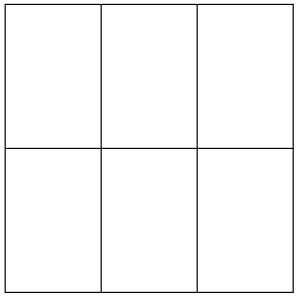


Figura 14: Cuadrado de lado 6

Comenzando con $n = 6$ y aplicando de forma alternada los lemas 2.3.4 y 2.3.5, en ese orden, obtenemos el resultado. □

Teorema 2.3.7 *Sea $n \neq 3, 5$, entonces se puede adoquinar el cuadrado de lado n.*

Demostración: Inmediato de las proposiciones 2.3.3 y 2.3.6. □

2.4 Adoquinados libres de fallas

Consideremos un cuadrado de lado entero n y la cuadrícula de $n \times n$ que se forma al dividirlo en n^2 cuadrados unitarios. Esa cuadrícula está formada por $n-1$ segmentos verticales y $n-1$ segmentos horizontales (excluyendo a los 4 lados del cuadrado de lado n). Cada uno de estos $2(n-1)$ segmentos recibe el nombre de *línea de falla* [1, 11, 12].

Diremos que una configuración es *libre de fallas* si cada una de las líneas de falla corta al menos a uno de los trominós de la configuración. En caso contrario diremos que la configuración tiene una *falla* en cada línea de falla que no corte al menos un trominó. Diremos que un cuadrado tiene un *adoquinado libre de fallas* si para cualquier elección del conjunto $\mathcal{V}$ existe una configuración libre de fallas.

Como ejemplo, todas las configuraciones presentadas en la figura 11 para el cuadrado de lado 7 son libres de fallas, sin embargo, la configuración presentada en la figura 14 para el cuadrado de lado 6 tiene 3 fallas: dos verticales y una horizontal.

A continuación demostraremos que todos los cuadrados que se pueden adoquinar también se pueden adoquinar libres de fallas.

Teorema 2.4.1 *Sea $n \neq 3, 5$, entonces se puede adoquinar libre de fallas el cuadrado de lado n.*

Demostración: Revisemos las demostraciones de los lemas 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4 y 2.3.5. Sean m y M las longitudes de los lados de los cuadrados menor y mayor, respectivamente, referidos en cada uno de los lemas.

Supongamos que el cuadrado de lado m se puede adoquinar libre de fallas. Entonces, la configuración presentada para el cuadrado de lado M no tiene fallas en las $m-1$ líneas de falla horizontales superiores ni en las $m-1$ líneas de falla verticales izquierdas. Una inspección de cada configuración mostrada nos prueba que en las $2(M-m)$ líneas de falla restantes tampoco hay fallas.

Por lo tanto, las construcciones mostradas en los cuatro lemas mencionados preservan la propiedad de adoquinado libre de fallas. Para terminar la demostración, basta ver que los adoquinados correspondientes a los cuadrados de lado 2 y 7 usados en los lemas 2.3.1 y 2.3.2 son libres de fallas, mientras que en los lemas 2.3.4 y 2.3.5 se requiere mostrar un nuevo adoquinado libre de fallas para el cuadrado de lado 6.

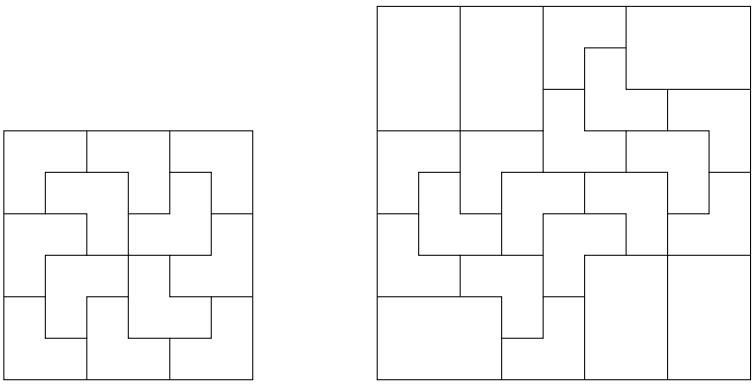


Figura 15: Adoquinados libres de fallas para $n = 6, 9$

Sin embargo, a pesar de que existe un adoquinado libre de fallas para el cuadrado de lado 6, este no tiene la propiedad de tener un bloque vertical en la esquina inferior derecha, así que mostraremos también un adoquinado libre de fallas para el cuadrado de lado 9 que tenga un bloque vertical en la esquina inferior derecha, para posteriormente aplicar los lemas 2.3.5 y 2.3.4, en ese orden, comenzando con $n = 9$. □

3 Adoquinado de cubos

Considere una malla tridimensional infinita formada por cubos unitarios. Un conjunto de N ($N \geq 1$) cubos unitarios tomados de esa malla tales que son conexos por las caras recibe el nombre de N-cubo. Un *policubo* es un N-cubo para alguna N [2].

No distinguiremos entre N-cubos congruentes, así que sólo hay un 1-cubo (llamado *monocubo*), un 2-cubo (llamado *dicubo*), dos 3-cubos (llamados *tricubo lineal* y *tricubo recto*), seis 4-cubos, etc.

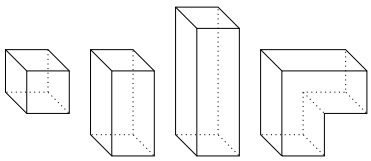


Figura 16: Los N-cubos con $N \leq 3$

A partir de este momento reduciremos nuestra atención a los policubos que son cubos de lado n (y por lo tanto, n^3-cubos) y al tricubo recto (al cual llamaremos simplemente *tricubo*).

Diremos que un cubo $\mathcal{N}$ de lado n se puede *adoquinar* con tricubos si se cumple alguna de las siguientes tres condiciones:

Caso (a) $n \equiv 0 \bmod 3$ y podemos cubrir todos los cubos unitarios de $\mathcal{N}$ con exactamente $n^3/3$ tricubos,

Caso (b) $n \equiv 1 \bmod 3$ y podemos cubrir todos los cubos unitarios de $\mathcal{N}$ (excepto uno ubicado en posición arbitraria) con exactamente $(n^3 - 1)/3$ tricubos,

Caso (c) $n \equiv 2 \bmod 3$ y podemos cubrir todos los cubos unitarios de $\mathcal{N}$ además de otro cubo unitario colocado en posición arbitraria en la superficie de $\mathcal{N}$ (formando ahora un (n^3+1)-cubo) con exactamente $(n^3 + 1)/3$ tricubos.

Notemos que en esta ocasión tenemos tres casos: (a) los tricubos cubren todo el cubo, (b) los tricubos cubren todo el cubo excepto un cubo unitario, y (c) los tricubos cubren todo el cubo y un cubo unitario adicional. Recordemos que para los cuadrados sólo hubo dos casos.

Los conceptos de *configuración* y *cubo vacante* son análogos a los conceptos de *configuración* y *cuadrado vacante* definidos para los adoquinados de cuadrados.

El *cubo sobrante* es el cubo unitario que se agrega en el caso (c) mencionado arriba.

3.1 Ejemplos

Como es un poco complicado visualizar un adoquinado tridimensional, mostraré cierta notación alternativa a través de algunos ejemplos.

Lo que haremos será dibujar un cuadrado por cada cada capa de cubos unitarios en el cubo original (de arriba hacia abajo). En cada capa la notación será la misma que la empleada con trominós, excepto que los tricubos pueden contener partes en otra capa.

Un $\triangle$ indica que el tricubo continúa hacia abajo, un $\circ$ indica que el tricubo continúa hacia arriba.

Ejemplo 3.1.1 *Adoquinado del cubo de lado 2. Como* $2 \equiv 2 \ mod\ 3$ *entonces agregaremos un cubo unitario en la superficie del cubo de lado 2. Cualesquiera dos* 9*-cubos obtenidos de esta forma son congruentes entre si. Abajo se muestra una configuración para este policubo.*

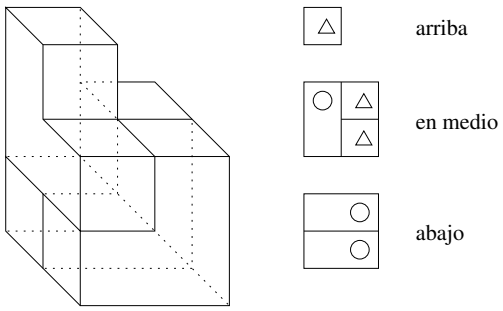


Figura 17: Cubo de lado 2

Ejemplo 3.1.2 *Adoquinado del cubo de lado 3. Como* $3 \equiv 0 \ mod\ 3$ *entonces debemos adoquinar usando exclusivamente tricubos. Enseguida se muestra una configuración para este cubo.*

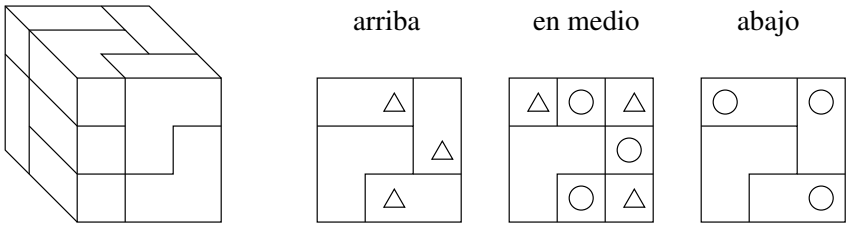


Figura 18: Cubo de lado 3

Ejemplo 3.1.3 *Adoquinado del cubo de lado 4. Como* $4 \equiv 1 \ mod\ 3$ *entonces debemos mostrar configuraciones para cada uno de los cuatro casos escencialmente distintos que aparecen al eliminar un cubo unitario del interior del cubo de lado 4. En la siguiente figura, el primer renglón de cuadrados muestra configuraciones para tres de estos casos y el segundo renglón muestra una configuración para el cuarto caso.*

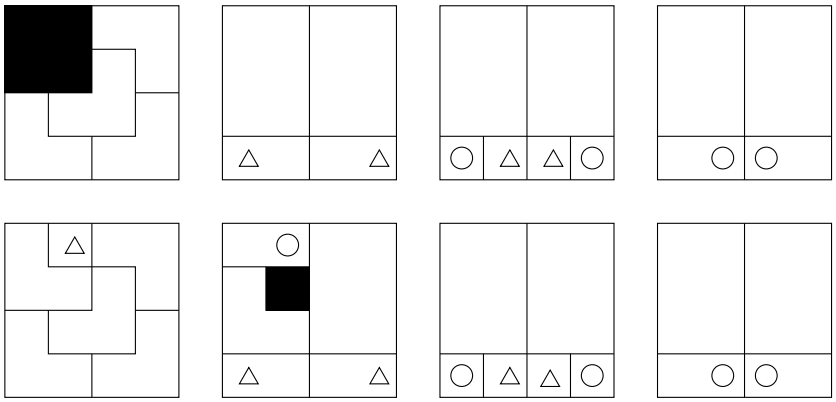


Figura 19: Cubo de lado 4

3.2 Resultado general para cubos

A continuación demostraremos que todo cubo de lado n se puede adoquinar. La prueba está dividida en tres casos.

Proposición 3.2.1 *Sea* n *un natural múltiplo de* 3*, entonces se puede adoquinar el cubo de lado* n *con tricubos.*

Demostración: Inmediato de que el cubo de lado n se puede dividir en cubos de lado 3 y de que el cubo de lado 3 se puede adoquinar. □

Proposición 3.2.2 *Sea $n \equiv 1$ mod 3, entonces se puede adoquinar el cubo de lado n con tricubos.*

Demostración: Hagamos $n = 3k + 1$. La prueba se hará por inducción en k. Para $k = 0$ es trivial, mientras que para $k = 1$ se sigue del ejemplo 3.1.3. Supongamos que se puede adoquinar el cubo de lado $3k+1$ (con $k \geq 1$), mostraremos que se puede adoquinar el cubo de lado $3(k+1)+1 = 3k+4$. En efecto, podemos escoger un cubo de lado $3k+1$ con un vértice común al cubo de lado $3k + 4$ tal que contenga al cubo vacante. Por la hipótesis de inducción este cubo se puede adoquinar y sólo falta ver que el resto del cubo de lado $3k + 4$ también se puede adoquinar. Esta parte se puede dividir en 7 piezas:

- Tres de la clase A, cada una es un prisma rectangular de $3k \times 3k \times 3$.
- Tres de la clase B, cada una es un prisma de altura k cuya base es un cuadrado de lado 4 al que le falta un cuadrado unitario en una esquina.
- Una de la clase C, que es un cubo de lado 4 al que le falta un cubo unitario en una esquina.

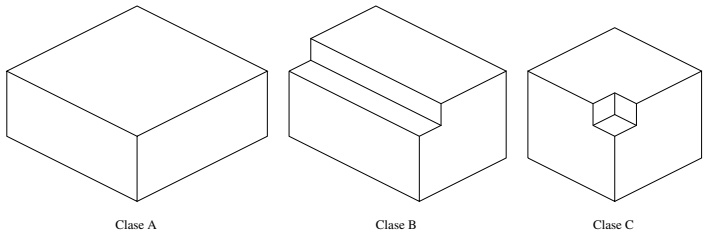


Figura 20: Piezas en las que se divide el cubo de lado $3k + 4$

Cada una de estas piezas se puede adoquinar: la A porque se puede dividir en cubos de lado 3, la B porque se obtiene pegando cuadrados de lado 4 y la C porque es un cubo de lado 4. Finalmente, el cubo de lado $3k + 4$ también se puede adoquinar. □

Proposición 3.2.3 *Sea $n \equiv 2$ mod 3, entonces se puede adoquinar el cubo de lado n con tricubos.*

Demostración: Hagamos $n = 3k + 2$. La prueba se hará por inducción en k. Para $k = 0$ se sigue del ejemplo 3.1.1. Para $k = 1$

($n = 5$) tenemos seis casos. No mostraré las configuraciones respectivas, pero existen. Supongamos que se puede adoquinar el cubo de lado $3k + 2$ (con $k \geq 1$), mostraremos que se puede adoquinar el cubo de lado $3(k + 1) + 2 = 3k + 5$. En efecto, podemos escoger un cubo de lado $3k + 2$ con un vértice común al cubo de lado $3k + 5$ tal que sea adyacente al cubo sobrante. Por la hipótesis de inducción este cubo se puede adoquinar y sólo falta ver que el resto del cubo de lado $3k + 5$ también se puede adoquinar. Esta parte se puede dividir en 7 piezas:

- Tres de la clase A, cada una es un prisma de altura 3 cuya base es un cuadrado de lado $3k + 2$ al que le falta un cuadrado de lado 2 en una esquina.
- Tres de la clase B, cada una es un prisma rectangular de $3 \times 3 \times 3k$.
- Una de la clase C, que es un cubo de lado 5 al que le falta un cubo de lado 2 en una esquina.

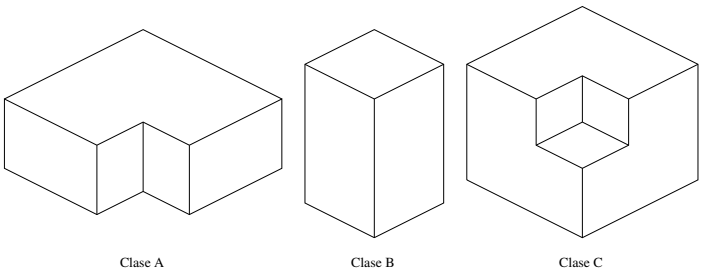


Figura 21: Piezas en las que se divide el cubo de lado $3k + 5$

Cada una de estas piezas se puede adoquinar: la A porque se puede dividir en cubos de lado 3 y bloques de $3 \times 2 \times 1$, la B porque se puede dividir en cubos de lado 3 y la C porque es el siguiente cubo de lado 5 al que se le ha quitado un cubo de lado 2:

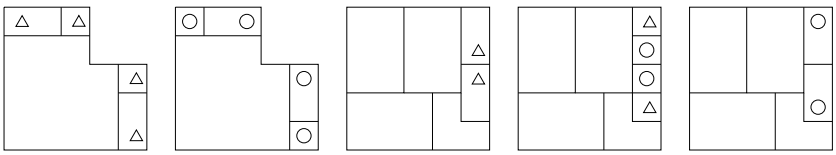


Figura 22: Cubo de lado 5 sin un cubo de lado 2

Finalmente, el cubo de lado $3k + 5$ también se puede adoquinar. □

Teorema 3.2.4 *Para todo natural n se puede adoquinar el cubo de lado n con tricubos.*

Demostración: Se sigue de las proposiciones 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3. □

4 Posibles extensiones

El problema de adoquinado de cuadrados ha quedado completamente resuelto. Ahora podemos preguntarnos cuáles rectángulos de lados enteros se pueden adoquinar y para cuáles de ellos existen adoquinados libres de fallas. La primera pregunta aparece en [3].

En el problema de adoquinado de cubos aún falta por responder para cuáles cubos existen adoquinados libres de fallas. Por otra parte, también podemos preguntarnos cuáles prismas rectangulares de lados enteros se pueden adoquinar.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Fabio Dávila (actualmente en el CIMAT) que me haya introducido en este tema. También quiero agradecer las valiosas sugerencias que me hicieron tres árbitros anónimos para mejorar la presentación de este artículo.

El presente trabajo fue desarrollado durante mi estancia en el Departamento de Matemáticas de la ESFM-IPN y en el Departamento de Sistemas de la UAM Azcapotzalco. Parte de este trabajo fue presentado en el XXIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Las últimas modificaciones fueron realizadas en el Departamento de Combinatoria y Optimización de la Universidad de Waterloo (Canadá).

M. en C. Francisco Javier Zaragoza Martínez
Departamento de Sistemas, UAM
Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas,
México, D.F., 02200,
franz@hp9000a1.uam.mx

Referencias

[1] Atkinson M.D. y Lunnon W.F., *Regular fault-free rectangles*, Math. Gaz., 64 (1980) no. 428, 99-106.

[2] Cho H.G. y Zelikovsky A., *Spanning closed trail and hamiltonian cycle in grid graphs*, Algorithms and Computations (Cairns,

1995), 342-351. Lecture Notes in Comput. Sci., 1004. Springer, Berlin, 1995.

[3] Chu I.P. y Johnsonbaugh R., *Tiling deficient boards with trominoes*, Math. Mag., 59 (1986), no. 1, 34-40.

[4] Gardner M., *Mathematical Games*, Scientific American, 203 (Nov 1960), 186-198.

[5] Golomb S.W., *Checker boards and polyominoes*, Amer. Math. Monthly, 61 (1954), 675-682.

[6] Golomb S.W., *Covering a rectangle with L-tetrominoes*, Amer. Math. Monthly, 70 (1963), 760-761.

[7] Golomb S.W., *Polyominoes*, 2nd ed., Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1994.

[8] Golomb S.W., *Tiling rectangles with polyominoes*, Math. Intelligencer, 18 (2) (1996), 38-47.

[9] Klarner D.A., *Some results concerning polyominoes*, Fibonacci Quart., 3 (no. 1) (Feb 1965), 9-20.

[10] Klarner D.A., *Packing a rectangle with congruent N-ominoes*, J. Combin. Theory, 7 (1969), 107-115.

[11] Robinson P.J., *Fault-free rectangles tiled with rectangular polyominoes*, Combinatorial Mathematics IX 372-377, Lecture Notes in Math. 952, Springer Berlin 1982.

[12] Scherer K., *Minimal fault-free rectangles packed with I_n polyominoes*, J. Recreational Math., 13 (1980/81), no. 1, 4-6.