Morfismos, Vol. 2, No. 1, 1998, pp. 47–65

MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONARIO

JOSÉ VILLA MORALES [1]

Resumen

Se demostrará que solamente tiene sentido definir un Movimiento Browniano Fraccionario con espacio paramétrico T si y sólo si T es un espacio con producto interno. Además, se dará una representación integral de este proceso.

1991 Mathematics Subject Classification: 60H05, 60H10.
Keywords and phrases: MBF, espacio con producto interno, representación integral.

1 Introducción

El Movimiento Browniano Fraccionario (MBF), con espacio paramétrico $\mathbb{R}$, fue introducido por Kolmogorov [5] en el contexto de transformaciones de curvas en espacios de Hilbert. Subsecuentemente Mandelbrot y Van Ness [9] investigaron las propiedades básicas de este proceso y enfatizaron su relevancia para modelar fenómenos naturales, por ejemplo en Hidrología. Recientemente ha sido utilizado en Teoría de Finanzas [2].

El MBF de índice $H \in (0,1]$, con espacio paramétrico $\mathbb{R}^d$, se define como un campo aleatorio Gaussiano real valuado $\{B_t : t \in \mathbb{R}^d\}$ con media cero y función de covarianza

$$C_H(t,s) = \frac{1}{2}\left\{\| t \|^{2H} + \| s \|^{2H} - \| t-s \|^{2H}\right\},$$

donde $\| \cdot \|$ es la norma Euclidiana en $\mathbb{R}^d$.

[1]Estudiante de Maestría, CIMAT.

La manera usual de demostrar la existencia del MBF, con espacio de parámetros $\mathbb{R}^d$, es utilizar el Teorema de consistencia de Kolmogorov [6]. Para esto es necesario y suficiente demostrar que la función C_H es positiva definida y simétrica. La primera demostración conocida de este hecho fue dada por Shoenberg [13], después se dieron otras demostraciones, ver por ejemplo [1], [10] o [11]. Por lo tanto, vemos que el problema para demostrar la existencia de este proceso, con espacio de parámetros $\mathbb{R}^d$, radica en demostrar que la función C_H es positiva definida.

Imitando la definición anterior vemos en principio que si queremos un MBF con espacio de parámetros T, este espacio debe ser un espacio vectorial normado $(T, ||\cdot||)$, debido a que se desea que el proceso tenga una función de covarianza de la forma C_H.

De esta forma surge la siguiente pregunta: ¿Qué propiedad debe tener el espacio vectorial normado $(T, ||\cdot||)$ para que pueda ser espacio de parámetros del MBF?. O de manera análoga, ¿qué propiedad debe de tener la norma $||\cdot||$ para que la función C_H sea positiva definida (para toda $H \in (0,1]$)?. Como acabamos de observar esta es una condición suficiente para mostrar la existencia del MBF. Uno de los propósitos del presente trabajo es mostrar que la respuesta a esta pregunta es que la norma $||\cdot||$ en T debe inducir un producto interno.

Las demostraciones antes mencionadas de que C_H es positiva definida tienen en común que no se pueden extender fácilmente al caso general, es decir considerar a $(T, ||\cdot||)$ como espacio de parámetros. La demostración que se dará aquí de que C_H es positiva definida tiene la ventaja de no ser muy complicada y general. De esta forma podremos hablar del MBF.

Por otra parte es conocido (ver [11]) que el MBF de índice $H \in (0,1]$ con espacio de parámetros $\mathbb{R}$, es un proceso autosimilar de índice H con incrementos estacionarios y además se puede representar como una integral estocástica de la siguiente forma:

$$B_t = \frac{1}{K(H)} \int_{\mathbb{R}} \left(((t-x)\vee 0)^{H-\frac{1}{2}} - (-x \vee 0)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

donde $\{W_x : x \in \mathbb{R}\}$ es un Movimiento Browniano estandar y

$$K^2(H) = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty \left((1+x)^{H-\frac{1}{2}} - x^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dx.$$

Cuando $H = \frac{1}{2}$, $K(\frac{1}{2}) = 1$ y la representación (1) es interpretada como $\int_0^t dW_x$, si $t > 0$, y $-\int_t^0 dW_x$ si $t < 0$. Otro hecho importante acerca del

MBF con espacio de parámetros $\mathbb{R}$, es que es el único proceso Gaussiano autosimilar con incrementos estacionarios.

Las propiedades anteriores del MBF con espacio de parámetros $\mathbb{R}$ sirven de motivación para demostrar sus análogos cuando el espacio de parámetros es $(T, ||\cdot||)$. En particular veremos que para caracterizar el MBF con espacio de parámetros $(T, ||\cdot||)$ es necesario introducir un concepto de incrementos estacionarios en el sentido fuerte.

En la actualidad se está desarrollando el cálculo estocástico del MBF, con espacio de parámetros $\mathbb{R}$ (ver [8]), y es de esperar que en el futuro el MBF, con espacio de parámetros $(T, ||\cdot||)$, cuente con algo similar.

2 Funciones positivo definidas y negativo definidas

El propósito de esta sección es desarrollar la herramienta necesaria para abordar el primer problema mencionado en la introducción, es decir, mostrar la existencia del MBF con espacio de parámetros T y caracterizar a dicho espacio paramétrico.

Sea $(T, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. Una función $\varphi : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *positiva definida* (pd), si para toda $n \in \mathbb{N}$ y $t_j \in T$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n$, se tiene que

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k \varphi(t_j, t_k) \geq 0.$$

Por otra parte diremos que φ es *negativa definida* (nd), si $\varphi(t, s) = \varphi(s, t)$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $t_j \in T$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n$, se cumple que

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k \varphi(t_j, t_k) \leq 0,$$

siempre que $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$.

Una función $\psi : T \longrightarrow \mathbb{R}$, se dirá positiva definida (negativa definida), si $\varphi(t, s) = \psi(t - s)$ es positiva definida (negativa definida).

El siguiente resultado resume algunas resume propiedades conocidas de las funciones pd y nd que nos serán de utilidad.

Lema 2.1 *(Propiedades de las funciones pd y nd.)*

a) Si $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$*, entonces* $\varphi_1(t,s) = f(t)f(s)$ *es pd y* $\varphi_2(t,s) = f(t) + f(s)$ *es nd.*

b) Si $\varphi_1, \varphi_2 : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ *son funciones pd, entonces* $\varphi_1 + \varphi_2$ *y* $\varphi_1\varphi_2$ *son también funciones pd. Si* φ_1 *y* φ_2 *son nd, entonces* $\varphi_1 + \varphi_2$ *es también nd.*

c) Si $\varphi : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ *es pd, entonces* e^{φ} *es pd.*

Sea $\psi : T \to \mathbb{R}$ una función tal que $\psi(t) \geq 0$ y $\psi(t) = \psi(-t)$, para toda $t \in T$. Definamos la función $C_H : T \times T \to \mathbb{R}$ como:

$$C_H(t,s) = \frac{1}{2}\left\{\psi^H(t) + \psi^H(s) - \psi^H(t-s)\right\},$$

para $t, s \in T$. Básicamente la función que será de interés es $\psi(t) = \| t \|^2$.

Se tiene el siguiente

Lema 2.2 *Sea* $H \in (0,1]$*. La función* C_H *es pd si y sólo si* ψ^H *es nd.*

Demostración: Supongamos que C_H es pd. Por la parte a) del Lema 2.1 tenemos que $\psi^H(t)+\psi^H(s)$ y $-2C_H(t,s)$ son nd, por lo tanto $\psi^H(t-s) = \psi^H(t) + \psi^H(s) - 2C_H(t,s)$ es nd, esto es por la parte b) del Lema 2.1.

Recíprocamente, supongamos que ψ^H es nd. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $t_j \in T$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n$. Definamos $c_0 = -\sum_{j=1}^n c_j$ y $t_0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 \geq \sum_{j,k=0}^{n} c_j c_k \psi^H(t_j - t_k) &= 2c_0 \sum_{j=1}^{n} c_j \psi^H(t_j) + \sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k \psi^H(t_j - t_k) \\ &= -2\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \psi^H(t_k)\right) \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k \psi^H(t_j - t_k) \\ &= -2 \sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k C_H(t_j, t_k). \end{aligned}$$

Así C_H es pd. ■

El siguiente resultado nos da una relación entre las funciones nd y pd.

Proposición 2.3 *La función $\psi(t)$ es nd si y sólo si $e^{-\lambda\psi(t)}$ es pd, para toda $\lambda > 0$.*

Demostración: Supongamos que $e^{-\lambda\psi}$ es pd, para toda $\lambda > 0$, entonces $\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda\psi})$ es nd. Por otra parte debido a que

$$\psi = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda\psi}),$$

tenemos que ψ es nd.

Recíprocamente, supongamos que ψ es nd. Por el Lema 2.2 tenemos que C_1 es pd y

$$-\psi(t-s) = 2C_1(t,s) - \psi(t) - \psi(s).$$

De esta forma se tiene que

$$e^{-\lambda\psi(t-s)} = e^{2\lambda C_1(t,s)} e^{-\lambda\psi(t)} e^{-\lambda\psi(t)},$$

para todo $\lambda > 0$. Por c) y a) del Lema 2.1, obtenemos que $e^{2\lambda C_1(t,s)}$ y $e^{-\lambda\psi(t)} e^{-\lambda\psi(t)}$ son pd y por b) del mismo Lema se tiene el resultado. ■

Una consecuencia de la Proposición 2.3 es el siguiente hecho:

Lema 2.4 *Si ψ es nd, entonces ψ^H es nd, para $0 < H \leq 1$.*

Demostración: Sea $H \in (0,1)$, entonces todo número real $\nu \geq 0$ se puede expresar como

$$\nu^H = \frac{H}{\Gamma(1-H)} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda\nu}) \lambda^{-1-H} d\lambda,$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $t_j \in T$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n$. Si $\sum_{j=1}^n c_j = 0$, entonces de lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^n c_j c_k \psi^H(t_j - t_k) &= \frac{H}{\Gamma(1-H)} \int_0^\infty \sum_{j,k=1}^n c_j c_k (1 - e^{-\lambda\psi(t_j - t_k)}) \lambda^{-1-H} d\lambda \\ &= \frac{H}{\Gamma(1-H)} \int_0^\infty - \sum_{j,k=1}^n c_j c_k e^{-\lambda\psi(t_j - t_k)} \lambda^{-1-H} d\lambda.\end{aligned}$$

Pero como ψ es nd, entonces por la Proposición 2.3 tenemos que $e^{-\lambda\psi}$ es una función pd, para toda $\lambda > 0$. Así

$$-\sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k e^{-\lambda\psi(t_j - t_k)} \leq 0.$$

Por lo tanto $\sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k \psi^H(t_j - t_k) \leq 0$. ■

Del lema anterior obtenemos el siguiente resultado, el cual nos da una relación entre la propiedad pd de C_H y nd de ψ.

Teorema 2.5 *La función C_H es pd, para toda $0 < H \leq 1$, si y sólo si la función ψ es nd.*

Demostración: Si C_H es pd, para toda $0 < H \leq 1$, entonces por el Lema 2.2 tenemos que $\psi^1 = \psi$ es nd. Recíprocamente si ψ es nd, entonces por el Lema 2.4, se tiene que ψ^H, $0 < H \leq 1$, es nd y por el Lema 2.2 se tendrá que C_H es pd, para toda $0 < H \leq 1$. ■

Una caracterización conocida de cuándo podemos definir un producto interno en un espacio vectorial normado la da el siguiente teorema. Esta caracterización la utilizaremos en la próxima sección.

Teorema 2.6 *En $(T, \|\cdot\|)$ se puede definir un producto interno si y sólo si $\|\cdot\|^2$ es nd.*

3 El espacio paramétrico del MBF

En esta sección aplicaremos los resultados obtenidos en la Sección 2.

Recordemos que tiene sentido definir el Movimiento Browniano Fraccionario con espacio paramétrico un espacio vectorial normado $(T, \|\cdot\|)$, si la función C_H es pd, para toda $0 < H \leq 1$. En cuyo caso el MBF de índice H, tendrá función de covarianza C_H.

El Teorema 2.5 nos dice que podemos definir el MBF, con espacio paramétrico $(T, \|\cdot\|)$ si y sólo si $\psi(t) = \| t \|^2$ es nd, y por el Teorema 2.6 tenemos que esto puede ocurrir si y sólo si T es un espacio con producto interno. Por lo tanto, *tiene sentido definir un MBF con espacio paramétrico T si y sólo si T es un espacio con producto interno.*

Sea $\{B_t : t \in T\}$ un MBF de índice $H \in (0,1]$, donde T es un espacio con producto interno (este proceso *existe* por lo que acabamos de observar). El MBF de índice H tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

a) $\{B_t : t \in T\}$ tiene *incrementos estacionarios* en $\| \cdot \|$, es decir, para cada $t, h \in T$ se tiene que $B_{t+h} - B_t \stackrel{d}{=} B_h$, esto es porque $B_x - B_y$ tiene distribución Gaussiana con media cero y varianza $\| x - y \|^{2H}$, para cualesquiera $x, y \in T$.

b) Si $a > 0$, entonces $\mathrm{Cov}(B_{as}, B_{at}) = \mathrm{Cov}(a^H B_s, a^H B_t)$, y por ser $\{B_t : t \in T\}$ un campo aleatorio Gaussiano tenemos que $\{B_{at} : t \in T\} \stackrel{d}{=} \{a^H B_t : t \in T\}$, por lo tanto $\{B_t : t \in T\}$ es un *proceso autosimilar de índice* $H \in (0,1]$.

Cuando $H = \frac{1}{2}$ el proceso $\{B_t : t \in T\}$ se llama Movimiento Browniano, el cual es una generalización del Movimiento Browniano multiparamétrico (con espacio de parámetros $\mathbb{R}^d$) definido por Lévy [7].

En las siguientes secciones daremos otras propiedades del MBF.

4 Representaciones integrales del MBF

Como se dijo inicialmente uno de los objetivos es demostrar que el MBF $\{B_t : t \in T\}$ de índice $H \in (0,1]$, cuando el espacio de parámetros T no es necesariamente unidimensional, tiene propiedades análogas a las del caso unidimensional. Una de estas es que cuenta con una representación integral.

Para ver la representación integral, en el caso general, comenzaremos por definir un cierto tipo de integral estocástica en la siguiente sección.

4.1 Integral estocástica

El propósito de esta sección es introducir notación y algunos conceptos ya conocidos.

Sea $(E, \mathcal{E}, m)$ un espacio de medida finita (o σ-finita), entonces existe una medida aleatoria Gaussiana M centrada con medida de control m (véase por ejemplo [11]). Usando este hecho se define una integral estocástica para cada $f \in L^2(E, \mathcal{E}, m)$,

$$I(f) = \int_E f(x) dM(x).$$

De esta forma se obtiene un campo aleatorio Gaussiano centrado $\{I(f) : f \in L^2(E, \mathcal{E}, m)\}$, que cumple

$$\mathbb{E}[I(f_1)I(f_2)] = 2\int_E f_1(x)f_2(x)dm(x), \tag{1}$$

para cada $f_1, f_2 \in L^2(E, \mathcal{E}, m)$.

A continuación se define una integral estocástica del tipo armonizable (ver Capítulo 6 y Sección 7.2.2 en [11]).

Sea $\widetilde{M} = M^{(1)} + iM^{(2)}$, donde $M^{(1)}$ y $M^{(2)}$ son medidas aleatorias Gaussianas centradas independientes en $(\mathfrak{X} \times R, \mathcal{G} \times \mathcal{B}(R))$, donde R es un subconjunto medible de $\mathbb{R}$, con la propiedad de que si $r \in R$, entonces $-r \in R$, y $(\mathfrak{X}, \mathcal{G})$ es un espacio medible. Además $M^{(1)}$ y $M^{(2)}$ tienen medida de control $\iota \otimes \nu$, donde ν es una medida finita absolutamente continua con respecto a λ (medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$) y $\frac{d\nu}{d\lambda} = g$ es una función par. ι es una medida de probabilidad en $(\mathfrak{X}, \mathcal{G})$.

Considérese la siguiente clase de funciones medibles complejo-valuadas

$$\mathcal{F} = \left\{ \widetilde{f} : \widetilde{f}(\mathfrak{x}, r) = \overline{\widetilde{f}(\mathfrak{x}, -r)},\ \int_{\mathfrak{X}}\int_R \left|\widetilde{f}(\mathfrak{x}, r)\right|^2 d\iota(\mathfrak{x})d\nu(r) < \infty \right\}.$$

Para cualquier $\widetilde{f} \in \mathcal{F}$ la integral

$$I(\widetilde{f}) = \int_{\mathfrak{X}}\int_R \widetilde{f}(\mathfrak{x}, r)d\widetilde{M}(\mathfrak{x}, r),$$

se define como

$$I(\widetilde{f}) = \int_{\mathfrak{X}}\int_R f^{(1)}(\mathfrak{x}, r)dM^{(1)}(\mathfrak{x}, r) - \int_{\mathfrak{X}}\int_R f^{(2)}(\mathfrak{x}, r)dM^{(2)}(\mathfrak{x}, r),$$

donde $\widetilde{f}(\mathfrak{x}, r) = f^{(1)}(\mathfrak{x}, r) + if^{(2)}(\mathfrak{x}, r)$.

Como consecuencia de esta definición obtenemos la covarianza del campo aleatorio Gaussiano centrado $\{I(\widetilde{f}) : \widetilde{f} \in \mathcal{F}\}$.

Proposición 4.1.1 Si $\widetilde{f_1}$ y $\widetilde{f_2}$ están $\mathcal{F}$, entonces

$$\mathbb{E}[I(\widetilde{f_1})I(\widetilde{f_2})] = 2\int_{\mathfrak{X}}\int_R \widetilde{f_1}(\mathfrak{x}, r)\overline{\widetilde{f_2}(\mathfrak{x}, r)}d\iota(\mathfrak{x})d\nu(r). \tag{2}$$

Demostración: Sean $\widetilde{f}_j(\mathfrak{x},r) = f_j^{(1)}(\mathfrak{x},r) + i f_j^{(2)}(\mathfrak{x},r)$, $j = 1,2$. Entonces por independencia de $M^{(1)}$ y $M^{(2)}$, y de que $\mathbb{E}[I(\widetilde{f}_j)] = 0$, $j = 1,2$, resulta

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I(\widetilde{f}_1)I(\widetilde{f}_2)] = &\ \mathbb{E}\left[\int_{\mathfrak{X}}\int_R f_1^{(1)}(\mathfrak{x},r)dM^{(1)}(\mathfrak{x},r)\int_{\mathfrak{X}}\int_R f_2^{(1)}(\mathfrak{x},r)dM^{(1)}(\mathfrak{x},r)\right]\\ &+\mathbb{E}\left[\int_{\mathfrak{X}}\int_R f_1^{(2)}(\mathfrak{x},r)dM^{(2)}(\mathfrak{x},r)\int_{\mathfrak{X}}\int_R f_2^{(2)}(\mathfrak{x},r)dM^{(2)}(\mathfrak{x},r)\right]\end{aligned}$$

Usando (1) queda

$$\mathbb{E}[I(\widetilde{f}_1)I(\widetilde{f}_2)] = 2\int_{\mathfrak{X}}\int_R\left\{f_1^{(1)}(\mathfrak{x},r)f_2^{(1)}(\mathfrak{x},r) + f_1^{(2)}(\mathfrak{x},r)f_2^{(2)}(\mathfrak{x},r)\right\}d\iota(\mathfrak{x})d\nu(r)$$

Por otra parte, ya que $\widetilde{f}_j \in \mathcal{F}$, entonces $f_j^{(1)}(\mathfrak{x},-r) = f_j^{(1)}(\mathfrak{x},r)$ y $f_j^{(2)}(\mathfrak{x},-r) = -f_j^{(2)}(\mathfrak{x},r)$, para $j = 1,2$. Así que para cada $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int_R f_1^{(1)}(\mathfrak{x},r)f_2^{(2)}(\mathfrak{x},r)d\nu(r) &= \int_{-\infty}^0 f_1^{(1)}(\mathfrak{x},r)f_2^{(2)}(\mathfrak{x},r)1_{R\cap\mathbb{R}_-}(r)g(r)dr\\ &\quad+\int_0^\infty f_1^{(1)}(\mathfrak{x},r)f_2^{(2)}(\mathfrak{x},r)1_{R\cap\mathbb{R}_+}(r)g(r)dr\\ &= 0.\end{aligned}$$

Análogamente, para cada $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ resulta que

$$\int_R f_1^{(2)}(\mathfrak{x},r)f_2^{(1)}(\mathfrak{x},r)d\nu(r) = 0.$$

De esta manera

$$\int_{\mathfrak{X}}\int_R f_1^{(1)}(\mathfrak{x},r)f_2^{(2)}(\mathfrak{x},r)d\nu(r)d\iota(\mathfrak{x}) = \int_{\mathfrak{X}}\int_R f_1^{(2)}(\mathfrak{x},r)f_2^{(1)}(\mathfrak{x},r)d\nu(r)d\iota(\mathfrak{x}).$$

Así (2) es cierto. ■

4.2 Caso multidimensional

Para dar una representación integral del MBF abordaremos primeramente el caso en que el espacio de parámetros es finito dimensional.

Sea μ una medida Gaussiana en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, es decir, μ es una medida con función característica

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Además, sea $R = \mathbb{R}\backslash(-1,1)$ y $d\nu(r) = |r|^{-(2H+1)}dr$ (nótese que $\nu(R) = H^{-1}$).

Veremos que una representación integral del MBF $\{B_t : t \in \mathbb{R}^d\}$ de índice $H \in (0,1]$, en este caso, es de la forma siguiente:

$$B_t = \frac{1}{K(H)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_R (e^{ir\langle t,x\rangle} - 1) d\widetilde{M}(x,r), \tag{3}$$

donde $\widetilde{M}$ es una medida aleatoria Gaussiana (complejo-valuada) con medida de control $|r|^{-(2H+1)}drd\mu(x)$ y la constante

$$K^2(H) = 2\int_R |e^{ir} - 1|^2 |r|^{-(2H+1)}dr \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |\langle \theta, x\rangle|^{2H} d\mu(x), \tag{4}$$

donde θ es un vector fijo en $\mathbb{R}^d$ de norma uno.

No es difícil ver que $K(H) < \infty$ y que la integral en $\mathbb{R}^d$, que aparece en (4), no depende de θ sino de la norma del vector θ. Vemos esto. Es posible mostrar que

$$\begin{aligned} \int_R |e^{ir} - 1|^2 |r|^{-(2H+1)}dr &\leq 2\int_0^\infty |e^{ir} - 1|^2 r^{-(2H+1)}dr \\ &= \frac{\pi}{H\Gamma(2H)\mathrm{sen}(H\pi)}. \end{aligned}$$

Ahora falta ver que el valor de la integral $\int_{\mathbb{R}^d} |\langle \theta, x\rangle|^{2H} d\mu(x)$ depende únicamente de $||\theta||$. Sea la variable aleatoria $Y_\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, definida como $Y_\theta(x) = \langle \theta, x\rangle$. Calculemos su función característica. Sea $u \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu[e^{iuY_\theta}] &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{iuY_\theta(x)} d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u\theta, x\rangle} d\mu(x) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\|u\theta\|^2} = e^{-\frac{u^2}{2}\|\theta\|^2}, \end{aligned}$$

es decir Y_θ es una variable aleatoria Gaussiana definida en el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$.

Recordemos que si X y Y son variables aleatorias, entonces $X \stackrel{d}{=} Y$ si y sólo si sus respectivas funciones características coinciden, en consecuencia $Y_\theta \stackrel{d}{=} Y_\alpha$ si y sólo si $\| \theta \| = \| \alpha \|$, por lo tanto si $Y_\theta \stackrel{d}{=} Y_\alpha$, entonces

$$\mathbb{E}_\mu\left[|Y_\theta|^{2H}\right] = \mathbb{E}_\mu\left[|Y_\alpha|^{2H}\right] < \infty,$$

debido a que una variable aleatoria Gaussiana tiene todos sus momentos. De esta forma $K(H) < \infty$.

A continuación veremos que el proceso $\{B_t : t \in \mathbb{R}^d\}$, definido en (3), es un proceso autosimilar de índice $H \in (0, 1]$, es decir, que para cada $a > 0$, $\{B_{at} : t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{d}{=} \{a^H B_t : t \in \mathbb{R}^d\}$.

Teorema 4.2.1 *El proceso B definido en* (3) *es autosimilar de índice $H \in (0, 1]$.*

Demostración: Por tratarse de variables aleatorias Gaussianas bastará con mostrar que Cov $(B_{at}, B_{as}) =$ Cov $(a^H B_t, a^H B_s)$, para $s, t \in \mathbb{R}^d$. Veamos pues esto. Usando (2) resulta que

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\ (B_{at}, B_{as}) &= \mathbb{E}\left[B_{at}B_{as}\right] \\ &= \frac{1}{K^2(H)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_R (e^{ir\langle at,x\rangle} - 1)\overline{(e^{ir\langle as,x\rangle} - 1)} \\ &\quad \cdot |r|^{-(2H+1)} dr d\mu(x) \\ &= \frac{1}{K^2(H)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_R (e^{iar\langle t,x\rangle} - 1)\overline{(e^{iar\langle s,x\rangle} - 1)} \\ &\quad \cdot |r|^{-(2H+1)} dr d\mu(x) \\ &= a^{2H}\mathbb{E}[B_t B_s] \\ &= \mathrm{Cov}\ (a^H B_t, a^H B_s), \end{aligned}$$

lo que implica que B es un proceso autosimilar de índice H. ■

El siguiente resultado nos da, entre otras cosas, la varianza de la variable aleatoria B_t.

Lema 4.2.2 Sean $t, s \in \mathbb{R}^d$, entonces

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = \| t - s \|^{2H} . \tag{5}$$

Demostración: Si $t = s$ no hay nada que demostrar. Supongamos que $s \neq t$, entonces

$$B_t - B_s = \frac{1}{K(H)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_R e^{ir\langle s,x\rangle}(e^{ir\langle t-s,x\rangle} - 1) d\widetilde{M}(x, r),$$

y usando (2) se logra

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = \frac{2}{K^2(H)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_R |e^{ir\langle t-s,x\rangle} - 1|^2 |r|^{-(2H+1)} dr d\mu(x).$$

Ya que $|e^{iy} - 1|^2 = |e^{i|y|} - 1|^2$, con $y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] &= \frac{2}{K^2(H)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_R |e^{i|r||\langle t-s,x\rangle|} - 1|^2 |r|^{-(2H+1)} dr d\mu(x) \\
&= \frac{2}{K^2(H)} \int_{\{x: x \neq t-s\}} |\langle t-s, x\rangle|^{2H} d\mu(x) \\
&\quad \cdot \int_R |e^{ir} - 1|^2 |r|^{-(2H+1)} dr \\
&= \frac{2}{K^2(H)} \parallel t-s \parallel^{2H} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left\langle \frac{t-s}{\parallel t-s \parallel}, x \right\rangle \right|^{2H} d\mu(x) \\
&\quad \cdot \int_R |e^{ir} - 1|^2 |r|^{-(2H-1)} dr.
\end{aligned}$$

En consecuencia (5) es cierto. ■

Finalmente como resultado de (5) tenemos el

Teorema 4.2.3 *El proceso B definido en (3) tiene incrementos estacionarios y es el MBF.*

Demostración: Para ver que $B_{t+h} - B_t \overset{d}{=} B_h$, para $t, h \in \mathbb{R}^d$, bastará con mostrar que $\mathbb{E}[(B_{t+h} - B_t)^2] = \mathbb{E}[B_h^2]$ pero esto es claro de (5).

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\text{Cov}\,(B_t, B_s) &= \mathbb{E}\left[B_t B_s\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\mathbb{E}[B_t^2] + \mathbb{E}[B_s^2] - \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\parallel t \parallel^{2H} + \parallel s \parallel^{2H} - \parallel t-s \parallel^{2H}\right\}.
\end{aligned}$$

Lo que implica que B es un MBF, pues $\{B_t : t \in \mathbb{R}^d\}$ es un campo aleatorio Gaussiano. ■

4.3 Caso general

Como vimos en la Sección 3, tiene sentido que un espacio vectorial T sea espacio de parámetros del MBF si y sólo si T es un espacio con producto interno. En vista de esto es deseable obtener una representación integral del MBF $\{B_t : t \in T\}$ de índice $H \in (0, 1]$, cuando T cuenta con la única propiedad de tener un producto interno.

La representación integral (3) provoca a pensar en una representación general, por tener ésta un producto interno, y es precisamente esto lo que motiva dicha representación.

Iniciaremos introduciendo los siguientes conceptos.

Sea Φ un espacio vectorial real. Una función $f : \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *seudo-continua* si para cada $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Phi$, la función $f(t_1\varphi_1 + \cdots + t_n\varphi_n)$ es continua en las n variables reales $t_1, ..., t_n$.

El espacio de todas las funcionales lineales reales en Φ se denotará por Φ^Λ. Si $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Phi$, entonces el conjunto

$$\{f \in \Phi^\Lambda : (f(\varphi_1), ..., f(\varphi_n)) \in F\},$$

se llama *conjunto Borel cilíndrico* con base F correspondiente a $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$. El conjunto de todos los conjuntos Borel cilíndricos correspondientes a $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ forman una σ-álgebra, denotada por $S(\varphi_1, ..., \varphi_n)$, y todos los conjuntos Borel cilíndricos forman una álgebra denotada por S. Sea $\mathcal{F}^\Lambda$ la menor σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos Borel cilíndricos ($\mathcal{F}^\Lambda = \sigma(S)$). Se tiene que $S \subset \mathcal{B}(\Phi^\Lambda)$ y si Φ es separable, entonces $\mathcal{F}^\Lambda = \sigma(S) = \mathcal{B}(\Phi^\Lambda)$ (ver en [4] la página 62).

El siguiente resultado puede consultarse en [14] (ver particularmente el Teorema 4.3.5).

Teorema 4.3.1 *Si f es una función seudo-continua positiva definida en Φ (con $f(0) = 1$), entonces existe una única medida de probabilidad P^Λ en $(\Phi^\Lambda, \mathcal{F}^\Lambda)$ tal que*

$$f(\varphi) = \int_{\Phi^\Lambda} e^{i\xi(\varphi)} dP^\Lambda(\xi),$$

para toda $\varphi \in \Phi$.

El teorema anterior no implica que f sea una función característica (es mas bien un funcional tipo Bochner ver [4]), esto es debido a que la medida P^Λ no está definida en una $\sigma-$álgebra de Φ, que es lo que se requeriría para que f fuera una función característica (ver [12] o Definición 4.2.4 en [14]).

Lo anterior quedará claro con el siguiente ejemplo. Sea $f : T \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}||t||^2\right), \quad t \in T,$$

entonces f es seudo-continua y además es positiva definida (ver Proposición 2.3 y Teorema 2.6), entonces por el Teorema anterior existe una única medida de probabilidad P^Λ en $(T^\Lambda, \mathcal{F}^\Lambda)$ tal que

$$f(t) = \int_{T^\Lambda} e^{i\xi(t)} dP^\Lambda(\xi), \tag{6}$$

para cada $t \in T$. Sin embargo, sabemos que no existe una medida de probabilidad en $(T, \mathcal{B}(T))$ tal que f tenga la forma (6) (ver Ejemplo 2.3.1 en [4] o [12]).

Para nuestros propósitos no es importante que f sea una función característica, si no el hecho de la existencia de una medida de probabilidad P^Λ en $(T^\Lambda, \mathcal{F}^\Lambda)$, tal que (6) es cierto.

Haciendo uso de lo anterior veremos que el proceso

$$B_t = \frac{1}{K(H)} \int_{T^\Lambda} \int_R (e^{ir\xi(t)} - 1) d\widetilde{M}(\xi, r), \tag{7}$$

donde $\widetilde{M}$ es una medida aleatoria Gaussiana (complejo-valuada) con medida de control $|r|^{-(2H+1)} dr dP^\Lambda(\xi)$, es la representación integral general buscada del MBF con índice $H \in (0, 1]$.

Como antes, tenemos que $K(H)$ es de la forma (4), donde ahora la integral en $\mathbb{R}^d$ es del tipo

$$\int_{T^\Lambda} |\xi(\theta)|^{2H} dP^\Lambda(\xi). \tag{8}$$

Para demostrar que $\{B_t : t \in T\}$ es un proceso autosimilar de índice $H \in (0, 1]$ con incrementos estacionarios se hace lo mismo que en el caso multidimensional.

Por ejemplo, veamos que el valor de la integral en (8) depende únicamente de $\| \theta \|$. Sea la variable aleatoria $Y_\theta : (T^\Lambda, \mathcal{F}^\Lambda) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donde $Y_\theta(\xi) = \xi(\theta)$ (usamos esta notación para que quede clara la medibilidad), entonces como antes bastará con calcular su función característica. Sea $u \in \mathbb{R}$, de (6) concluimos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{P^\Lambda}[e^{iuY_\theta}] &= \int_{T^\Lambda} e^{iuY_\theta(\xi)} dP^\Lambda(\xi) \\ &= \int_{T^\Lambda} e^{i\xi(u\theta)} dP^\Lambda(\xi) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\|u\theta\|^2} = e^{-\frac{u^2}{2}\|\theta\|^2}.\end{aligned}$$

Así el campo aleatorio Gaussiano $\{B_t : t \in T\}$, dado en (7) es el MBF de índice $H \in (0,1]$.

5 Caracterización de procesos Gaussianos autosimilares con incrementos estacionarios en el sentido fuerte

Cuando el espacio de parámetros es $\mathbb{R}$, es conocido que el único proceso Gaussiano autosimilar con incrementos estacionarios es el MBF. Sin embargo cuando la dimensión del espacio paramétrico aumenta, entonces la afirmación anterior no es necesariamente cierta, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea $T = \mathbb{R}^2$. Sabemos que $|\cdot|^2$ es una función nd en $\mathbb{R}$, entonces por el Teorema 2.5 ($\psi(t_1, t_2) = |t_1|^2$) tenemos que

$$C_H(t,s) = \frac{1}{2}\left\{|t_1|^{2H} + |s_1|^{2H} - |t_1 - s_1|^{2H}\right\}, \tag{1}$$

con $t = (t_1, t_2)$ y $s = (s_1, s_2)$, es pd. Esto implica que existe un proceso Gaussiano centrado $\{Y_t : t \in \mathbb{R}^2\}$, con función de covarianza (1). Este proceso es autosimilar de índice $H \in (0,1]$ y tiene incrementos estacionarios pero no es un MBF con espacio de parámetros $\mathbb{R}^2$.

Veremos a continuación que la razón del por qué se obtuvo esta contrariedad es debido a que el concepto de estacionaridad no es lo bastante restrictivo.

Iniciaremos con el siguiente concepto. Usando el hecho de que todo subespacio finito dimensional de un espacio normado tiene un complemento (Corolario 3.2.1 de [3]), diremos que una transformación lineal $g : T \to T$ es una *rotación* en T, si existe un conjunto finito de vectores $\{t_1, ..., t_n\}$ linealmente independientes, tal que

$$g(x) = \mathfrak{r}(c_x) + l_x,$$

donde $x = c_x + l_x$, con $T = \mathfrak{L}\{t_1, ..., t_n\} \oplus \mathfrak{L}\{t_1, ..., t_n\}^\perp$ y $\mathfrak{r}$ es una rotación en el subespacio cerrado de dimensión finita $\mathfrak{L}\{t_1, ..., t_n\}$. Usando este concepto se da la siguiente definición.

Definición 5.1 Un proceso $\{X_t : t \in T\}$ se dice que tiene *incrementos estacionarios en el sentido fuerte* si

$$\{X_{g(t)} - X_{g(0)} : t \in T\} \stackrel{d}{=} \{X_t - X_0 : t \in T\},$$

para cualquier rotación o traslación g en T.

Una propiedad de los procesos con incrementos estacionarios en el sentido fuerte es que si $t, s \in T$, con $\| \ t \ \| = \| \ s \ \|$, entonces $X_t - X_0 \stackrel{d}{=} X_s - X_0$. En efecto sea $\{t_0, s_0\}$ un conjunto ortonormal tal que $t, s \in \mathfrak{L}\{t_0, s_0\}$. La rotación g_s que manda t a s esta determinada da la siguiente forma. Sea $x \in T = \mathfrak{L}\{t_0, s_0\} \oplus \mathfrak{L}\{t_0, s_0\}^\perp$, entonces $x = a_x t_0 + b_x s_0 + l_x$, así

$$\begin{aligned} g_s(x) &= \langle(\cos\theta, -\text{sen}\ \theta), (a_x, b_x)\rangle t_0 \\ &\quad + \langle(\text{sen}\ \theta, -\cos\theta), (a_x, b_x)\rangle s_0 + l_x, \end{aligned}$$

donde

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle t, s\rangle}{|t||s|}\right), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

En consecuencia

$$X_s - X_0 = X_{g_s(t)} - X_{g_s(0)} \stackrel{d}{=} X_t - X_0.$$

Nótese que el proceso $\{Y_t : t \in \mathbb{R}^2\}$ con función de covarianza (1), no tiene incrementos estacionarios en el sentido fuerte, pues por ejemplo considérese la rotación $g_{(0,1)}$ que manda (1,0) a $(0,1)$, entonces $Y_{(1,0)} \stackrel{d}{\neq} Y_{(0,1)}$, pues $\mathbb{E}[Y_{(1,0)}^2] = 1$ y $\mathbb{E}[Y_{(0,1)}^2] = 0$.

Tenemos la siguiente caracterización.

Teorema 5.2 *El MBF de índice* $H \in (0,1]$ *es el único proceso Gaussiano autosimilar de índice* $H \in (0,1]$ *que tiene incrementos estacionarios en el sentido fuerte.*

Demostración: Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso Gaussiano autosimilar de índice H que tiene incrementos estacionarios en el sentido fuerte. Por autosimilaridad tenemos que para toda $a > 0$, $X_0 \overset{d}{=} a^H X_0$, por lo tanto $X_0 = 0$.
Sean $t, s \in T$ y considérese la traslación $g_s(x) = x + s$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{t+s} - X_s] &= \mathbb{E}[X_{g_s(t)} - X_{g_s(0)}] \\ &= \mathbb{E}[X_t - X_0], \\ &= \|t\|^H \mathbb{E}[X_{t_0}] \end{aligned} \tag{2}$$

donde $t_0 \in T$, con $\|t_0\| = 1$.
Usando de nuevo autosimilaridad obtenemos

$$\mathbb{E}[X_{t+s} - X_s] = \left(\|t+s\|^H - \|s\|^H\right) \mathbb{E}[X_{t_0}]. \tag{3}$$

De (2) y (3) concluimos que $\mathbb{E}[X_{t_0}] = 0$, así $\mathbb{E}[X_t] = 0$, para toda $t \in T$. De manera análoga $\mathbb{E}[X_t^2] = \|t\|^{2H}\sigma^2$, con $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_{t_0}^2]$. Por otra parte

$$X_t - X_s = X_{g_s(t-s)} - X_{g_s(0)} \overset{d}{=} X_{t-s} - X_0,$$

implica

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = \mathbb{E}[X_{t-s}^2] = \|t-s\|^{2H}\sigma^2.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t X_s] &= \frac{1}{2}\left\{\mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\|t\|^{2H} + \|s\|^{2H} - \|t-s\|^{2H}\right\}\sigma^2, \end{aligned}$$

que es la covarianza de un MBF. ■

Agradecimientos

La primera parte de este trabajo fue elaborado en el CIMAT y la segunda en el CINVESTAV; agradezco a ambas instituciones su apoyo. De igual forma a Víctor Pérez-Abreu por haberme sugerido el problema e impulsado siempre. También quiero agradecer a Jorge A. León Vázquez y a José A. López Mimbela sus sugerencias.

José Villa Morales
Departamento de Matemáticas
ESFM-IPN
Unidad Adolfo López Matéos
Apdo. Postal 14-740
México D.F. 07300, México.
jvilla@math.cinvestav.mx

Referencias

[1] P. Cartier, *Introduction à l'étude des mouvements Browniens plusieur paramètres*, en Sèminarie de Probabilitès V, Springer-Verlag (1971), 58-77.

[2] N. Cutland, P. Kopp and W. Willinger, *Stock price returns and the Joseph effec: a fractional version of the Black-Schole model*, Proceedings of the Monte Verita Conference, Ascona, Switzerland, 1993.

[3] C. L. DeVito, *Functional Analysis*, Academic Press, 1978.

[4] G. Kallianpur and J. Xiong, *Stochastic differential equations in infinite dimensional spaces*, Lecture Notes-Monograph series of the Institute of Mathematical Statistic (1995), vol. 26.

[5] A. N. Kolmogorov, *Wienershe Spriralen und einige andere interessante Kurven im Hilberts chen raum*, Comptes Rendus (Doklady) de l' Académie des Sciences de l' URSS **26** (1940), 115-118.

[6] A. N. Kolmogorov, *Foundations of Probability Theory*, Chelsea, New York, 1950.

[7] P. Lévy, *Sur le mouvement Brownien dependant de plusieurs parametres*, C.R. Acad. Sci. Paris **220** (1945), 420-422.

[8] S. J. Lin, *Stochastic analysis of fractional Brownian motions*, Stochastic and Stochastic Reports (1995), vol. 55, 121-149.

[9] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Review **10** 1968, 422-437.

[10] M. Ossiander and E. C. Waymire, *Certain positive-definite kernels*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989), 487-492.

[11] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, 1994.

[12] V. Sazonov, *A remark on characteristic functionals*, Theory Prob. Applications (1958), 188-192.

[13] I. J. Schoenberg, *Metric spaces and positive definite functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 522-536.

[14] D. X. Xia, *Measure and Integration Theory on Infinite-Dimensional Spaces*, Academic Press, 1972.