Morfismos, Vol. 1, No. 1, 1997, pp. 47–67.

Algebra Generada por la Proyección de Bergman y un Operador de Traslación

Josué Ramírez Ortega[1]

Resumen

Sea G un dominio conexo y acotado en $\mathbb{C}$ tal que su frontera es unión finita, ajena por pares, de curvas cerradas simples de clase C^1 y K la proyección de Bergman en $B(L_2(G))$. Si α es un difeomorfismo en $\overline{G}$ de clase C^1 entonces W es el operador de traslación con peso en $B(L_2(G))$ dado por W $\varphi = w\varphi \circ \alpha$, donde $w = \sqrt{|\det J_\alpha|}$. En este artículo se describe el álgebra de símbolos del álgebra C* $\mathcal{R} = \mathcal{R}\ (C(\overline{G})I, K, W, \mathcal{C})$. También se enuncian condiciones de Noether para los operadores en $\mathcal{R}$.

1991 Mathematics Subject Classification: 47B38, 47C15.
Keywords and phrases: Proyección de Bergman, Operador de Traslación.

1 Introducción

Existen numerosos trabajos sobre integrales singulares en una dimensión, desde los pioneros de Yu. V. Sojotski, A. Harnack y J. Plemelj, e investigaciones subsecuentes de I. I. Priválov, N. I. Muskhelishvili, I. N. Vekua, F. D. Gajov, y S. G. Mikhlin, entre otros. Posteriormente A. P. Calderón y A. Zygmund [2] desarrollaron trabajos en integrales singulares multidimensionales, y fue S. G. Mikhlin quien introdujo símbolos para estos operadores integrales singulares. En forma más precisa, consideremos al operador integral singular en $B(L_2(\mathbb{R}^n))$

$$A\varphi(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x,\theta)}{||x-y||^n}\varphi(y)dy, \qquad \theta = \frac{x-y}{||x-y||},$$

[1]Estudiante de Doctorado, CINVESTAV–IPN. Becario del CONACyT. Becario de la Academia de la Investigación Científica, junio 1995–mayo 96.

donde $a, b \in C(\dot{\mathbb{R}}^n)$[2)] y la función característica satisface las condiciones siguientes

1) $\int_{S^{n-1}} f(x,\theta)d\theta \ = 0,$

2) $\int_{S^{n-1}} |f(x,\theta)|^2 d\theta \leq c = constante,$

3) $\lim\limits_{x \to x_o} \int_{S^{n-1}} |f(x,\theta) - f(x_o,\theta)|^2 d\theta \ = 0.$

En los términos de I. B. Simonenko [8, 9], el operador A es equivalente en cada punto $x_o \in \dot{\mathbb{R}}^n$ al operador

$$A_{x_o}\varphi(x) = a(x_o)\varphi(x) + b(x_o)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_o,\theta)}{||x-y||^n}\varphi(y)dy.$$

Si F es la transformada de Fourier, entonces $FA_{x_o}F^{-1}$ es un operador de multiplicación por una función acotada y homogénea de grado cero $\Phi(x_o,\zeta)$ [6, 9]. $\Phi(x_o,\zeta)$ es el símbolo del operador A_{x_o} que, con la notación de L. Hörmander [6], es el multiplicador de tipo (2,2) asociado a A_{x_o}. El símbolo del operador A es la función $\Phi(x,\zeta)$.

En este artículo se describe el álgebra generada por la proyección de Bergman y un operador de traslación. Se utiliza el resultado abstracto de N. L. Vasilevski [12] que describe el álgebra de símbolos del álgebra C* generada por un operador singular abstracto, un operador de traslación unitario autoadjunto, los operadores de multiplicación por funciones continuas y los operadores compactos.

Sea G un dominio conexo y acotado en el plano complejo $\mathbb{C}$ cuya frontera es una unión finita, ajena por pares, de curvas cerradas simples de clase C^1, K la proyección de Bergman de L_2(G) sobre el espacio de Bergman $A^2 = \mathrm{H(G)} \cap L_2\mathrm{(G)}$, α un difeomorfismo de $M = \overline{G}$ sobre M que satisface la condición de Carleman $\alpha^2 = id$, y W un operador de traslación con peso definido en $L_2(G)$ por $W\varphi = w\varphi \circ \alpha$.

En la sección 2 veremos que el operador $S = 2K - I$ es un operador singular abstracto. Veremos también las condiciones sobre w bajo las cuales el operador W es unitario autoadjunto. Consideraremos el caso particular $w = \sqrt{|\det J_\alpha|}$, donde J_α es la matriz Jacobiana de α; con esta hipótesis y siguiendo [12], se describe el álgebra de símbolos del álgebra C* generada por K, W, los operadores de multiplicación por funciones continuas y los operadores compactos que denotamos por $\mathcal{C}$. Esta álgebra se denotará por $\mathcal{R} = \mathcal{R}\ (K, W, C(M), \mathcal{C})$.

[2)] $\dot{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ denota la compactificación de $\mathbb{R}^n$ en un punto.

Para la descripción del álgebra $\mathcal{R}$ es fundamental determinar el espectro local [8, 12] en $\zeta \in \overline{G}$ del operador $K - WKW$. En la sección 3 veremos que los operadores K, WKW son equivalentes al operador cero en cada punto $\zeta \in G$, por lo tanto, el escalar 0 es el único elemento del espectro local de $K - WKW$ en $\zeta \in G$.

La mayor dificultad se presenta cuando se calcula el espectro local de $K - WKW$ para puntos sobre la frontera de G. La proyección K se descompone como una combinación lineal de productos de operadores integrales singulares más un operador compacto [1]. En la sección 4 veremos que por medio de esta descomposición, el espectro local de $K - WKW$ es igual al espectro local de un operador singular generalizado compuesto en $B(L_2(\mathbb{C}))$ [8, 9]. El espectro local de un operador singular generalizado compuesto está estrechamente relacionado con el problema de factorización de una matriz cuadrada definida en $\mathbb{R}$ [8, 9]. Así, el problema de determinar el espectro local de $K - WKW$ para puntos sobre la frontera de G se transforma en un problema de factorización. En la sección 5 se resuelve el problema de factorización, y por lo tanto, se determina el espectro local de $K - WKW$ para puntos sobre la frontera de G.

Cabe destacar que cuando el Jacobiano es menor que cero, el espectro local de $K - WKW$ para puntos sobre la frontera de G no depende del difeomorfismo α. Este hecho no ocurre cuando el Jacobiano es positivo.

2 Preliminares

Aun cuando G no sea acotado y con frontera suave, se tiene que $W \in B(L_2(G))$ si, y solo si, $|w \circ \alpha|^2 |\det J_\alpha| \in L_\infty(G)$. La siguiente proposición establece condiciones bajo las cuales el operador W es unitario autoadjunto.

Proposición 2.1 *Para el operador de traslación con peso W tenemos:*

1) $W^2 = w\ w \circ \alpha\ I$,

2) $W^* \varphi = \overline{w \circ \alpha}\ |\det J_\alpha|\ \varphi \circ \alpha\ I$,

3) $W^2 = I \Leftrightarrow w\ w \circ \alpha = 1$ *en casi todo punto,*

4) $W^* = W \Leftrightarrow \overline{w \circ \alpha}\ |\det J_\alpha| = w$ *en casi todo punto,* *5)* $W^{-1} = W^* = W \Leftrightarrow w = g\ \sqrt{|\det J_\alpha|}$*, donde* $g\ :\ \overline{G} \to S^1$ *satisface la condición :* $g\ g \circ \alpha = 1$ *en casi todo punto.*

J_α *es la matriz Jacobiana de* α *(en las variables reales).*

Demostración. $W^2\varphi = w\ (W\varphi) \circ \alpha = w(w \circ \alpha)(\varphi \circ \alpha^2) = w(w \circ \alpha)\varphi$. Para cada $\varphi, \psi \in L_2(G)$:

$$
\begin{aligned}
< W\varphi, \psi > &= \int_G w(z)\varphi(\alpha(z))\overline{\psi(z)}dV(z), \qquad z = \alpha(\zeta) \\
&= \int_G \varphi(\zeta)\overline{\overline{w(\alpha(\zeta))}\psi(\alpha(\zeta))}|\det J_\alpha(\zeta)|dV(\zeta) \\
< \varphi, W\psi > &= \int_G \varphi(\zeta)\overline{w(\zeta)\psi(\alpha(\zeta))}dV(\zeta)
\end{aligned}
$$

Por la unicidad de W^* se obtiene 2). Si $W^2 = I$ entonces $1 = I(1) = W^2(1) = w(w \circ \alpha)$, la afirmación recíproca de 3) es inmediata. Si $W^* = W$ entonces, tomando $\psi \equiv 1$ y considerando la unicidad en el teorema de Riesz, se deduce que $w = \overline{w \circ \alpha}|\det J_\alpha|$; la afirmación recíproca de 4) es inmediata. Finalmente:

$$
\begin{aligned}
W^{-1} = W^* = W \quad &\Leftrightarrow \quad w\ w \circ \alpha = 1 \ \text{ y } \ \overline{w \circ \alpha}|\det J_\alpha| = w \\
&\Leftrightarrow \quad w\ w \circ \alpha = 1 \ \text{ y } \ \overline{w\ w \circ \alpha}|\det J_\alpha| = \bar{w}w \\
&\Leftrightarrow \quad w\ w \circ \alpha = 1 \ \text{ y } \ |w| = \sqrt{|\det J_\alpha|} \\
&\Leftrightarrow \quad w = g\sqrt{|\det J_\alpha|},
\end{aligned}
$$

donde $g\ :\ \overline{G} \to S^1$ satisface la condición : $g\ g \circ \alpha = 1$ en casi todo punto. ■

En adelante vamos a suponer que W es unitario autoadjunto, y en particular elegimos $w = \sqrt{|\det J_\alpha|}$.

Es el momento pertinente para dar una definición y un hecho de los principios locales. Un operador $A \in B(L_2(M)$ se dice que es de tipo local si para cualesquiera cerrados ajenos F_1, F_2 contenidos en M, el operador $P_{F_1}AP_{F_2}$ es compacto, donde $P_F = \chi_F I$. El operador A es de tipo local si, y solo si, para cada $a(\zeta) \in C(M)$ el operador $a(\zeta)A - Aa(\zeta)I$ es compacto [5].

La proyección de Bergman K admite la siguiente descomposición [1]:

$K = I - S_G\bar{S}_G + L$

donde L es un operador compacto y $S_G, \bar{S}_G$ son los operadores integrales singulares en $B(L_2(G))$ dados por :

$$(S_G\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_G \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} dV(\zeta), \qquad (\bar{S}_G\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_G \frac{\varphi(\zeta)}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2} dV(\zeta).$$

Los operadores integrales singulares son de tipo local [8, 9], por lo tanto tenemos el siguiente

Teorema 2.1 *El operador $S = 2K - I$ es un operador singular abstracto, es decir, satisface las tres condiciones siguientes:*

1) $S^2 - I$ es compacto,

2) $S^* - S$ es compacto,

3) $Sa(\zeta)I - a(\zeta)S$ es compacto para cada $a(\zeta) \in C(M)$.

La afirmación 3) dice que S es de tipo local. Los operadores $S \pm I$ no son compactos.

Tenemos ahora las hipótesis requeridas en [12].

Sea $\mathcal{R}_o = \mathcal{R}\ (S, WSW, C(M)I, \mathcal{C})$ el álgebra C* generada por S, WSW, los operadores compactos y los operadores de multiplicación por funciones continuas. Un cálculo simple muestra que el operador WSW es de tipo local, por lo tanto, todos los operadores en $\mathcal{R}_o$ son de tipo local.

Se define $\hat{\mathcal{R}}_o = \mathcal{R}_o/\mathcal{C}$, $\pi : \mathcal{R}_o \to \hat{\mathcal{R}}_o$ la aplicación canónica y $Z = \pi(C(M)I)$. Z es una subálgebra C* central de $\hat{\mathcal{R}}_o$. Para cada ζ_o, J_{ζ_o} denota el ideal maximal en Z correspondiente a ζ_o, $J(\zeta_o) = \hat{\mathcal{R}}_o \cdot J_{\zeta_o}$ el ideal bilateral cerrado en $\hat{\mathcal{R}}_o$ generado por J_{ζ_o}, y $\pi_{\zeta_o} : \hat{\mathcal{R}}_o \to \mathcal{R}\ _o(\zeta_o) = \hat{\mathcal{R}}_o/J(\zeta_o)$ la aplicación canónica. Para describir el álgebra de símbolos de $\mathcal{R}$ es fundamental determinar el espectro de $\pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})$.

Sean A, B dos operadores de tipo local en $B(L_2(M))$. Decimos que A, B ($\hat{A}, \hat{B}$) son equivalentes en el punto $\zeta_o \in M$ si para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de ζ_o tal que $|||P_U(A-B)||| := ||\hat{P}_U(\hat{A}-\hat{B})|| < \epsilon$. Se dice que A es localmente Fredholm en $\zeta_o \in M$ si existe un operador $R \in B(L_2(M))$ y una vecindad U de ζ_o tal que $RAP_U - P_U, P_UAR - P_U$ son compactos. Para cada $\zeta_o \in M$, $F_{\zeta_o} = \{a \in C(M) \mid a[M] \subset [0,1],$ existen vecindades $\overline{U_1} \subset U_o$ de ζ_o tal que $a|_{U_1} \equiv 1$ y $a|_{U_o^C} \equiv 0\}$; se tienen los mismos conceptos si sustituimos P_U por un elemento en F_{ζ_o}

en las definiciones anteriores. No es difícil verificar que el conjunto de elementos en $\hat{\mathcal{R}}_o$ y equivalentes a cero en ζ_o, es igual al ideal $J(\zeta_o)$; además, un elemento $A \in \hat{\mathcal{R}}_o$ es localmente Fredholm en ζ_o si, y solo si, $\pi_{\zeta_o}(\hat{A})$ es invertible [5, 8].

3 Espectro local en un punto interior

En primer lugar, determinaremos el espectro de $\pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})$ cuando $\zeta_o \in G$; con este objetivo será necesaria la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Sea $K_G(z,\zeta)$ el núcleo de Bergman del dominio G. Para cada $\varphi \in L_2(G)$:*

$$(WKW\varphi)(z) = \int_G \varphi(\zeta) K_G^{\alpha}(z,\zeta)\, dV(\zeta)$$

donde $K_G^{\alpha}(z,\zeta) = w(z)\ \overline{w(\zeta)}\ K_G(\alpha(z),\alpha(\zeta))$.

Demostración. Si $\varphi \in L_2(G)$ entonces

$$\begin{aligned}(WKW\varphi)(z) &= w(z)(KW\varphi)(\alpha(z))\\ &= w(z) \textstyle\int_G w(\varepsilon)\varphi(\alpha(\varepsilon))K_G(\alpha(z),\varepsilon)dV(\varepsilon), \qquad \varepsilon = \alpha(\zeta)\\ &= w(z) \textstyle\int_G w(\alpha(\zeta))\varphi(\zeta)K_G(\alpha(z),\alpha(\zeta))|\det J_\alpha(\zeta)|dV(\zeta)\\ &= w(z) \textstyle\int_G \varphi(\zeta)\ \overline{w(\zeta)}K_G(\alpha(z),\alpha(\zeta))dV(\zeta)\end{aligned}$$

la última igualdad se obtiene de la identidad $w(\alpha(\zeta))|\det J_\alpha(\zeta)| = \overline{w(\zeta)}$.
■

Si $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para A^2, entonces $K_G(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z)\ \overline{\varphi_j(\zeta)}$. Para cada compacto $X \subset G$ existe $d = d(X,G)$ tal que $\forall\ z\ \in X\ :\ \|\ \{\varphi_j(z)\}_{j=1}^{\infty}\ \|_{\ell^2} \leq\ d$, por lo tanto, $\forall z \in X$: $||K_G(\cdot,\zeta)||_{L_2} \leq d$.

El siguiente teorema afirma que los representantes locales de K, WKW son iguales a cero para cada $\zeta_o \in G$.

Teorema 3.1 *Para cada $\zeta_o \in G$, $\pi_{\zeta_o}(\hat{K}) = \pi_{\zeta_o}(\hat{W}\hat{K}\hat{W}) = 0$, por lo tanto,*

$$\mathrm{sp}\ (\pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})) = 0 \ \ \textit{si} \ \ \zeta_o \in G.$$

Demostración. Sea U una vecindad de ζ_o tal que $\overline{U} \subset G$ es compacto. Si $c \in F_{\zeta_o}$ y $\overline{U_1} \subset U_o \subset U$, entonces $\forall\ \varphi \in L_2(G)$,

$$
\begin{aligned}
|(cWKW\varphi)(z)| &= |c(z)|\ | < \varphi, \overline{K_G^{\alpha}(z,\cdot)} > | \\
&\leq |c(z)|\ \ \| K_G^{\alpha}(z,\cdot) \|_{L_2} \| \varphi \|_{L_2} \\
&\leq |c(z)| \, \| w \|_\infty \| K(\alpha(z),\cdot) \|_{L_2} \| \varphi \|_{L_2} \\
&\leq\ d\ \| w \|_\infty \| \varphi \|_{L_2}\ \ \chi_{U_o}(z), \quad d = d(U) = constante.
\end{aligned}
$$

Después de tomar la norma $\| \cdot \|_{L_2}$ en esta última desigualdad se infiere que

$$\| cWKW \|_2 \leq\ d\ \| w \|_\infty \, \mu(U_o)^{1/2},$$

así

$$\| \pi_{\zeta_o}(\hat{W}\hat{K}\hat{W}) \| = \inf_{c \in F_{\zeta_o}} \| \hat{c}\hat{W}\hat{K}\hat{W} \| \leq \inf_{c \in F_{\zeta_o}} \| cWKW \| = 0.$$

Tomando $\alpha = w = id$, se prueba que $\pi_{\zeta_o}(\hat{K}) = 0$. ■

4 Caracterización del espectro local en la frontera

En lo que sigue nos limitaremos en determinar el espectro de $\pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})$ cuando $\zeta_o \in \partial G$. Admitimos que α tiene extensión α_1 a todo $\mathbb{C}$, α_1 difeomorfismo de clase C^1 con ∞ como punto fijo, que sus derivadas parciales satisfacen una condición de Hölder, que el valor absoluto de su Jacobiano está acotado por arriba y por abajo por una constante positiva y que $\alpha_1^2 = id$. Consideramos el operador unitario autoadjunto $W_1 \in B(L_2(\mathbb{C}))$ dado por $W\varphi = w_1\ \varphi \circ \alpha_1$, donde $w_1 = \sqrt{|\det J_{\alpha_1}|}$.

Sean $S_C, \bar{S}_C$ los operadores integrales singulares en $B(L_2(\mathbb{C}))$ definidos por las igualdades siguientes :

$$(S_C\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} dV(\zeta), \qquad (\bar{S}_C\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2} dV(\zeta).$$

Si el operador $P : L_2(\mathbb{C}) \to L_2(G)$ se define por $Pf = f|_G$, entonces el adjunto $P^* : L_2(G) \to L_2(\mathbb{C})$ es isométrico y está dado por :

$$\mathrm{P^*f}\,(z) = \begin{cases} f(z) & z \in G \\ 0 & z \notin G \end{cases}$$

El subespacio $X = P^*[L_2(G)]$ es cerrado en $L_2(\mathbb{C})$. Utilizando $PP^* = id_{L_2(G)}$ se verifica fácilmente que la siguiente aplicación es un isomorfismo :

$$\Psi : A \in B(L_2(G)) \to P^*AP \in B(X).$$

La identidad en $B(X)$ es $P_G = \chi_G I = P^*P$, y no es difícil verificar que $A \in B(L_2(G))$ es Fredholm si, y solo si, $P^*AP + Q_G$ es Fredholm, donde $Q_G = I - P_G$. Si A es de tipo local, entonces A es localmente Fredholm en ζ_o si, y solo si, $P^*AP + Q_G$ es localmente Fredholm en ζ_o.

Lema 4.1 *El operador $A_\lambda = \lambda I - K + WKW$ es localmente Fredholm en ζ_o si, y solo si, el siguiente operador (que se denotará por $\mathcal{B}_\lambda$) es localmente Fredholm en ζ_o :*

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -\bar{S}_C \\ 0 & I & W_1\bar{S}_C W_1 \\ S_C & W_1 S_C W_1 & \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_G & 0 & 0 \\ 0 & P_G & 0 \\ 0 & 0 & P_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_G & 0 & 0 \\ 0 & Q_G & 0 \\ 0 & 0 & Q_G \end{pmatrix}$$

El primer operador matricial se denotará por $\mathcal{A}_\lambda$.

Demostración. Observe que

$$A_\lambda = \lambda I + S_G\bar{S}_G - WS_GWW\bar{S}_GW + L_1,$$

donde L_1 es un operador compacto. Utilizando las identidades :

$$P^*S_GP = P_GS_CP_G, \quad P^*\bar{S}_GP = P_G\bar{S}_CP_G,$$
$$P^*WP = P_GW_1P_G, \quad W_1P_G = P_GW_1,$$

se deduce que

$$\begin{aligned} P^*A_\lambda P + Q_G &= \lambda P_G + P_GS_CP_G\bar{S}_CP_G - P_GW_1S_CW_1P_GW_1\bar{S}_CW_1P_G \\ &\quad + Q_G + L_2, \end{aligned}$$

donde L_2 es un operador compacto. El operador $P^*A_\lambda P + Q_G$ es localmente Fredholm en ζ_o si, y solo si, es el siguiente operador [7] :

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} I & 0 & -P_G\bar{S}_CP_G \\ 0 & I & P_GW_1\bar{S}_CW_1P_G \\ P_GS_CP_G & P_GW_1S_CW_1P_G & \lambda P_G + Q_G \end{pmatrix} \\ &= P_GAP_G + Q_G = (AP_G + Q_G)(I - Q_GAP_G) \\ &= \mathcal{B}_\lambda(I - Q_GAP_G), \quad A = \mathcal{A}_\lambda. \end{aligned}$$

El operador $(I - Q_G A P_G)$ es invertible, con inverso $(I + Q_G A P_G)$, por lo tanto E es localmente Fredholm si, y solo si, $\mathcal{B}_\lambda$ es localmente Fredholm. ∎

Con este lema caracterizamos la invertibilidad local de $\lambda I - K + WKW$ con la invertibilidad local del operador singular generalizado compuesto $\mathcal{B}_\lambda \in B(L_2(\mathbb{C}))$ [8, 9]. Los trabajos de I. B. Simonenko [8, 9] permiten determinar la invertibilidad local de un operador singular generalizado compuesto en puntos sobre la frontera de G. A fin de aplicar los resultados de I. B. Simonenko serán necesarias algunas definiciones.

Siguiendo a S. G. Mikhlin [8], definimos los símbolos de los operadores integrales singulares siguientes:

$$\Phi_S(\xi) = \text{Sym } S_C(\xi) = \left(\bar{\xi}/|\xi|\right)^2,$$
$$\Phi_{\bar{S}}(\xi) = \text{Sym } \bar{S}_C(\xi) = \left(\xi/|\xi|\right)^2,$$
$$\Phi_{S_W}(\zeta,\xi) = \text{Sym } W_1 S_C W_1(\zeta,\xi) = \Phi_S\,(F\xi),$$
$$\Phi_{\bar{S}_W}(\zeta,\xi) = \text{Sym } W_1 \bar{S}_C W_1(\zeta,\xi) = \Phi_{\bar{S}}\,(F\xi),$$

donde $F = (J^*_{\alpha_1}(\zeta))^{-1}$. Consideramos a ξ como un elemento de $\mathbb{R}^2$, así, $F\xi$ es la multiplicación de la matriz F por el vector ξ. Con la notación de [8, 9] :

$$\begin{aligned} \forall\zeta \in G \;\text{ y }\; \xi \in \mathbb{C} - \{0\}: \quad \Phi_{\mathcal{B}}(\zeta,\xi) &= \text{Sym } \mathcal{A}_\lambda(\zeta,\xi) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Phi_{\bar{S}}(\xi) \\ 0 & 1 & \Phi_{\bar{S}}(F\xi) \\ \Phi_S(\xi) & \Phi_S(F\xi) & \lambda \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\forall\zeta \notin \overline{G} \text{ y } \xi \in \mathbb{C} - \{0\}: \qquad \Phi_{\mathcal{B}}(\zeta,\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y cuando $\zeta \in \partial G$

$$\Phi^1_{\mathcal{B}}(\zeta,\xi) = \lim_{\substack{x\to\zeta \\ x\in G}} \Phi_{\mathcal{B}}(x,\xi) = \text{Sym } \mathcal{A}_\lambda(\zeta,\xi),$$

$$\Phi^2_{\mathcal{B}}(\zeta,\xi) = \lim_{\substack{x\to\zeta \\ x\notin \overline{G}}} \Phi_{\mathcal{B}}(x,\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $\eta = \eta^1_\zeta$ la normal a ∂G dirigida hacia G y $\eta^2_\zeta = -\eta$, donde $\zeta \in \partial G$. Si las matrices $\Phi^i_{\mathcal{B}},\ i = 1, 2$ no son degeneradas, se introduce

$$G^{12}_\zeta(\xi) = [\Phi^2_{\mathcal{B}}(\zeta,\xi)]^{-1}\Phi^1_{\mathcal{B}}(\zeta,\xi) = \text{Sym } \mathcal{A}_\lambda(\zeta,\xi).$$

Sea $\pi = \pi_\zeta$ la recta a través del origen y perpendicular a η, y

$$G(t) = G^{12}_{\zeta,\epsilon}(t) = G^{12}_\zeta(\eta t + \epsilon) = \text{Sym } \mathcal{A}_\lambda\ (\zeta, \eta t + \epsilon) \quad \epsilon \in \pi\ ,\ |\epsilon| = 1.$$

La matriz $G(t)$ admite una factorización de la forma

$$G(t) = X_+(t)DX_-(t),$$

donde $X^{\pm 1}_+$ admite extensión analítica al semiplano superior, $X^{\pm 1}_-$ admite extensión analítica al semiplano inferior y

$$D = \begin{pmatrix} ((t-z_o)/(t-\overline{z}_o))^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & ((t-z_o)/(t-\overline{z}_o))^{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & ((t-z_o)/(t-\overline{z}_o))^{k_3} \end{pmatrix}$$

con $k_i = k_i(\zeta,\epsilon)$ enteros (índices parciales) , $k_1 \geq k_2 \geq k_3$ y Im $z_o > 0$.

Teorema 4.1 *El operador $\lambda I - K + WKW$ es localmente Fredholm en $\zeta_o \in \partial G$ si, y solo si,*

1) Las matrices $\Phi^i_{\mathcal{B}}\ (\zeta_o,\xi)$ no son degeneradas,

2) $k_i(\zeta_o,\epsilon) = 0 \quad \forall\epsilon \in \pi_{\zeta_o},\ i = 1, 2, 3.$

Demostración. El operador $\mathcal{B}_\lambda$ es localmente Fredholm en $\zeta_o \in \partial G$ si, y solo si [8, 9]:

1) Las matrices $\Phi^i_{\mathcal{B}}\ (\zeta_o,\xi)$ no son degeneradas,

2) $k_i(\zeta_o,\epsilon) = 0 \quad \forall\epsilon \in \pi_{\zeta_o},\ i = 1, 2, 3.$

El teorema se infiere de este hecho y del lema 4.1. ■

5 Factorización y espectro local en la frontera

Si $\lambda = 0$ entonces la matriz $\Phi^1_{\mathcal{B}}$ es degenerada en cada $\zeta_o \in \partial G$, así, $0 \in \text{sp } (\pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W}))$.

Sabemos [10] que $\text{sp } (\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W}) = \bigcup_{\zeta\in M} \text{sp } (\pi_\zeta(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})) \subset [-1, 1]$, por ello, en adelante vamos a suponer que $\lambda \in [-1, 1] - \{0\}$; ésto implica que las matrices $\Phi^i_{\mathcal{B}}(\zeta_o,\xi)$ no son degeneradas, por lo tanto, nuestro problema de invertibilidad local del operador $\lambda I - K + WKW$ en la frontera de G se reduce a un problema de factorización.

El siguiente lema es importante para determinar la forma de la entrada (3,2) de la matriz $G(t)$.

Lema 5.1 *Sean* $\nu, \mu \in S^1$ *y* $c = \mathrm{Im}(\mu\bar{\nu}) =< \mu, i\nu >\neq 0$, *es decir,* ν, μ *son no colineales. Entonces*

$$\Phi_S(\nu t + \mu) = \Phi_S(\frac{1}{|c|}(t \pm \sqrt{1-c^2})\nu + \mu_1)$$

donde $\mu_1 = \mathrm{sgn}(c)\ i\nu$; *se toma el signo* $+$ *si* $|\nu - \mu| \geq \sqrt{2}$ *y el signo* $-$ *de otro modo.*

Demostración. Si $\mathrm{Re}(\mu\bar{\nu}) =< \mu, \nu >= 0$ entonces $|c| = 1$ y $\mu_1 = \mu$.

Supongamos $\mathrm{Re}(\mu\bar{\nu}) \neq 0$. Sean $P = t\nu + \mu$ y $P_1 = f(t)\nu + \mu_1$ mostrados en la figura. Considerando los triángulos semejantes $0P\mu$ y $0P_1\beta$, se obtiene de la figura

$$\frac{|f(t)| - |\beta - \mu_1|}{|t|} = \frac{|\beta|}{1}.$$

También con triángulos semejantes se infiere que $|\beta| = 1/|c|$ y $|\beta - \mu_1| = \sqrt{|\beta|^2 - 1} = \sqrt{1-c^2}/|c|$, por lo tanto, $|f(t)| = (|t| + \sqrt{1-c^2})/|c|$. Como $tf(t) \geq 0$, entonces $f(t) = (t \pm \sqrt{1-c^2})/|c|$, tomando el signo $+$ si $|\nu - \mu| > \sqrt{2}$ y el signo $-$ de otro modo. El símbolo de S_C es homogéneo de grado cero, luego, $\Phi_S(P) = \Phi_S(P_1)$. ∎

Como $\alpha^2 = id$, el Jacobiano de α nunca se anula y su signo es constante. En lo que sigue suponemos $\zeta_o \in \partial G$.

Lema 5.2 *1) Si* $\det J_\alpha < 0$, *entonces*

$$\mathrm{G}\,(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varphi_- \\ 0 & 1 & \psi_+ \\ \varphi_+ & \psi_- & \lambda \end{pmatrix} & si\ \epsilon = i\eta, \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varphi_+ \\ 0 & 1 & \psi_- \\ \varphi_- & \psi_+ & \lambda \end{pmatrix} & si\ \epsilon = -i\eta. \end{cases}$$

2) Si $\det J_\alpha > 0$ *entonces*

$$G(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varphi_- \\ 0 & 1 & \psi_- \\ \varphi_+ & \psi_+ & \lambda \end{pmatrix} & si\ \epsilon = i\eta, \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varphi_+ \\ 0 & 1 & \psi_+ \\ \varphi_- & \psi_- & \lambda \end{pmatrix} & si\ \epsilon = -i\eta, \end{cases}$$

donde $\varphi_+ = \beta(t-i)/(t+i)$, $\psi_+ = \gamma(t-\alpha_o)/(t-\bar{\alpha}_o)$, $\varphi_- = \bar{\varphi}_+$, $\psi_- = \bar{\psi}_+$, $|\beta| = |\gamma| = 1$ *y* $\mathrm{Im}(\alpha_o) > 0$.

Demostración. Como $\Phi_{\bar{S}} = \bar{\Phi}_S$, entonces solo basta calcular $\Phi_S(\eta t + \epsilon)$ y $\Phi_S(F[\eta t + \epsilon])$, donde $F = (J_\alpha^*(\zeta))^{-1}$. Con un cálculo simple se verifica que

$$\Phi_S(\eta t + i\eta) = \bar{\eta}^2 \frac{t-i}{t+i} = \varphi_+ \qquad \text{y} \qquad \Phi_S(\eta t - i\eta) = \bar{\eta}^2 \frac{t+i}{t-i} = \varphi_-.$$

Si $\nu = F\eta/|F\eta|$, $\mu = F\epsilon/|F\epsilon|$, y $R = |F\eta|/|F\epsilon|$, entonces el lema 5.1 y la homogeneidad de grado cero de Φ_S justifica la siguiente igualdad

$$\Phi_S(F[\eta t + \epsilon]) = \Phi_S(\frac{1}{|c|}(Rt \pm \sqrt{1-c^2})\nu + \mu_1)$$

donde $c = \mathrm{Im}(\mu\bar{\nu})$ y $\mu_1 = \mathrm{sgn}(c)\, i\nu$; se toma el signo $+$ si $|\nu - \mu| \geq \sqrt{2}$ y el signo $-$ de otro modo.

Definiendo $a = R/|c|$ (> 0) y $b = \pm\sqrt{1-c^2}/|c|$ ($\in \mathbb{R}$), se obtiene

$$\Phi_S(F[\eta t+\epsilon]) = \Phi_S([at+b]\nu+\mu_1) = \bar{\nu}^2 \begin{cases} \frac{at+b-i}{at+b+i} & \text{si } \operatorname{sgn}(c) > 0 \\ \\ \frac{at+b+i}{at+b-i} & \text{si } \operatorname{sgn}(c) < 0 \end{cases}$$

Ahora $c =< \mu, i\nu >=< \frac{F\epsilon}{|F\epsilon|}, i\frac{F\eta}{|F\eta|} >= \frac{1}{|F\epsilon|\ |F\eta|} < \epsilon, F^* iF\eta >$ $= \frac{\det\ F}{|F\epsilon|\ |F\eta|} < \epsilon, i\eta >$, así

$$\Phi_S(F[\eta t+\epsilon]) = \bar{\nu}^2 \begin{cases} \frac{t-\alpha_o}{t-\bar{\alpha}_o} & \text{si } \operatorname{sgn}(\det F)\ \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\epsilon\bar{\eta})) > 0 \\ \\ \frac{t-\bar{\alpha}_o}{t-\alpha_o} & \text{si } \operatorname{sgn}(\det F)\ \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\epsilon\bar{\eta})) < 0 \end{cases}$$

donde $\alpha_o = -\frac{b}{a} + \frac{1}{a}i$, y $\operatorname{Im}(\alpha_o) > 0$. ■

Las funciones φ_+, ψ_+ admiten continuación analítica al semiplano superior, y φ_-, ψ_- admiten continuación analítica al semiplano inferior.

Teorema 5.1 *Si* $\det J_\alpha < 0$, *entonces* $sp(\pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})) = \{0, \pm 1\}$, $\zeta_o \in \partial G$. *Como consecuencia, el operador* $\lambda I - K + WKW$ *es Fredholm si, y solo si,* $\lambda \notin \{\ 0,\ \pm 1\ \}$.

Demostración. Consideremos el caso $\epsilon = i\eta$.
Si $\lambda \neq -1$ entonces $G(t)$ admite la siguiente factorización

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\psi_+}{\lambda+1} & 1 \\ \varphi_+ & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varphi_- \\ 0 & \psi_- & \lambda+1 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = -1$ entonces

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \psi_+ \\ 0 & \varphi_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{t-\alpha_o}{t-\bar{\alpha}_o} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{t-\alpha_o}{t-\bar{\alpha}_o}\right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\varphi_- \\ 0 & \bar{\gamma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $\epsilon = -i\eta$.
Si $\lambda \neq -1$ entonces $G(t)$ admite la factorización

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\varphi_+}{1-\lambda} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \psi_+ & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \psi_- \\ \varphi_- & 0 & \lambda - 1 \\ \frac{\lambda}{\lambda-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = -1$ entonces

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varphi_+ \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \psi_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{t-i}{t+i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \psi_- \\ \bar{\beta} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La primera afirmación se infiere del teorema 4.1; la segunda del hecho que un operador de tipo local es Fredholm si, y solo si, es localmente Fredholm en cada punto de M [7, 8]. ∎

Teorema 5.2 *Si* $\det J_\alpha > 0$, *entonces*

$$sp(\pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})) = \left\{0, \ \pm\sqrt{\frac{1-2r}{1+2r}}\right\},$$

$0 < r = r(\zeta_o) = (\det J)/(||J||_2^2) \leq 1/2$, *donde* $J = J_\alpha(\zeta_o)$ *y* $||J||_2$ *es la norma euclideana de la matriz* J, $\zeta_o \in \partial G$.

Si $I_\alpha^\pm = \left\{ \pm\sqrt{\frac{1-2r(\zeta)}{1+2r(\zeta)}} \ : \ \zeta \in \partial G \right\}$ *entonces* $\lambda I - K + WKW$ *es Fredholm si, y solo si,* $\lambda \notin \{0\} \cup I_\alpha^- \cup I_\alpha^+$; *en particular,* $\pm I - K + WKW$ *es Fredholm.*

Observación 5.1 *La continuidad de* $r(\zeta)$ *sobre* ∂G *implica que cada curva cerrada simple de* ∂G *aporta un intervalo cerrado en la parte positiva del espectro esencial de* $K - WKW$.

Demostración. Si $\epsilon = i\eta$ entonces $G(t)$ admite la siguiente factorización

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \varphi_+ & \psi_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varphi_- \\ 0 & 1 & \psi_- \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Supongamos $\epsilon = -i\eta$.

Si $\alpha_o = i$, entonces $\beta\psi_+ = \gamma\varphi_+$, $\varphi_-\psi_+ = \bar{\beta}\gamma$, y

$$G(t) = \begin{pmatrix} -\varphi_+ & -\beta\bar{\gamma} & \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ \psi_+ & 1 & -\bar{\beta}\gamma/\lambda \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\varphi_-}{\lambda} & \frac{\psi_-}{\lambda} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \beta\bar{\gamma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $\alpha_o \neq i$. Con el cambio de variable $z = h(t) = \frac{t-i}{t+i}$ las funciones $\varphi_+,\ \psi_+$ quedan definidas en el círculo unitario U y son analíticas, las funciones $\varphi_-,\ \psi_-$ quedan definidas en $\overline{U}^C$ y son analíticas. Además

$$\varphi_+ = \beta z, \quad \varphi_- = \bar{\beta} z^{-1}, \quad \psi_+ = \gamma' \frac{z - z_o}{z - z_1}, \quad \psi_- = \gamma'' \frac{z - z_1}{z - z_o},$$

donde $z_o = h(\alpha_o) \in U$, $z_1 = h(\bar{\alpha}_o)$, $\gamma' = \gamma(\alpha_o + i)/(\overline{\alpha}_o + i)$ y $\gamma'' = \bar{\gamma}(\overline{\alpha}_o + i)/(\alpha_o + i)$.

Se tienen las siguientes relaciones : $z_o \bar{z}_1 = \gamma'\ \gamma'' = 1$.

La factorización de la matriz $G(t)$ quedará expresada en la variable z, así, $X_+^{\pm 1}$ es analítica en U, $X_-^{\pm 1}$ es analítica en $\overline{U}^C$ y $D =$ diag $\{z^{k_1},\ z^{k_2},\ z^{k_3}\}$.

Si $\lambda \neq \pm|z_o|$, entonces $G(t)$ es igual al producto de las dos matrices siguientes

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta z_1 \lambda g & \varphi_+ \\ \frac{\gamma'}{z_1} \frac{dz - f z_1}{z - z_1} & \gamma'(1 + \frac{g(\lambda z_1 - z_o)}{z - z_1}) & -\frac{\gamma'}{z_1}(dz_o + \frac{z z_1}{z - z_1}) \\ \bar{z}_o d & 1 & -f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (z - dgz_o)\varphi_- & \frac{z_o z_1 g \gamma''}{z - z_o} & -z_o \\ -\bar{\beta}\bar{z}_o d & \gamma'' \frac{z}{z - z_o} & 0 \\ -fg\varphi_- & \frac{z_1 \lambda g \gamma''}{z - z_o} & -1 \end{pmatrix}$$

donde $d = (\lambda + 1)/(1 - |z_o|^2)$, $f = (\lambda + |z_o|^2)/(1 - |z_o|^2)$, y $g = (1 - |z_o|^2)/(\lambda^2 - |z_o|^2)$.

Las siguientes igualdades son válidas : $(d\lambda - f)g = 1$ y $d = 1 + f$.

Si $\lambda = \pm|z_o|$, entonces $G(t) = ADB$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ \gamma' \frac{\lambda - 1}{z - z_1} & \frac{\gamma'}{z_1(1-\lambda)} \frac{z - z_1\lambda}{z - z_1} & \gamma'(z - z_o) \\ 0 & \frac{1}{z_1(1-\lambda)} & z - z_1 \end{pmatrix},$$

$D =$ diag$\{\ z, 1, z^{-1}\ \}$, y

$$B = \begin{pmatrix} \varphi_- & 0 & -1 \\ (z - z_1\lambda)\varphi_- & 0 & z_1\lambda(1-\lambda) \\ \frac{\overline{\beta \bar{z}_o}}{\lambda - 1} & \gamma'' \frac{z}{z - z_o} & 0 \end{pmatrix}.$$

Del teorema 4.1 se infiere que sp $(\pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})) = \{0,\ \pm|z_o|\ \}$.

Siguiendo con la notación de la prueba del lema 5.2, se puede verificar que

$z_o = (b^2 + 1 - a^2 + 2abi)/(b^2 + (1+a)^2)$

luego

$|z_o|^2 = 1 - 4a/(b^2 + (1+a)^2)$

sustituyendo los valores de a y b se obtiene

$|z_o|^2 = (|F\epsilon|^2 + |F\eta|^2 - 2\ \det F)/(|F\epsilon|^2 + |F\eta|^2 + 2\ \det F)$

un cálculo más muestra que $|F\epsilon|^2 + |F\eta|^2 = ||F||_2^2$ y

$$\begin{aligned} |z_o|^2 &= (||F||_2^2 - 2\ \det F)/(||F||_2^2 + 2\ \det F) \\ &= (||J||_2^2 - 2\ \det J)/(||J||_2^2 + 2\ \det J). \end{aligned}$$

Finalmente, si $\alpha_o = i$, entonces $\det F = |F\eta|^2 = |F\epsilon|^2$, por lo tanto, $||F||_2^2 - 2\det F = 0$. ■

6 Ejemplos

Observación 6.1 *El tratamiento anterior se aplica también cuando α_1 es una inversión en el origen; se darán algunos ejemplos en este caso.*

EJEMPLO 1) Sea G el anillo con centro en el origen, radio interior $a > 0$ y radio exterior b. Se define H como la aplicación de simetría del anillo G con respecto a la circunferencia de centro en el origen y radio $\frac{a+b}{2}$, y $C(z) = \bar{z}$ la aplicación de simetría con respecto al eje x.

La función H está dada por

$$H(z) = (a + b - |z|)\frac{z}{|z|}.$$

Si $v(t)$ es una biyección de $I = [a, b]$, de clase C^1 y con derivada nunca cero, entonces se define sobre G la siguiente función

$$V(z) = v(|z|)\frac{z}{|z|}.$$

V es una biyección de G, de clase C^1 y tal que aplica cada segmento $\{ re^{i\theta} : \ a \leq r \leq b \}$ sobre el mismo.

Si $\alpha = C \circ V \circ H \circ V^{-1}$, entonces α es un difeomorfismo en G de clase C^1, tal que satisface la condición de Carleman, $\det J_\alpha > 0$ y

$$\text{sp } \pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W}) = \left\{ \ 0, \ \pm\frac{av'(b) - bv'(a)}{av'(b) + bv'(a)} \ \right\}, \qquad \zeta_o \in \partial G.$$

El espectro local de $K - WKW$ es el mismo en cada punto de la frontera. En el siguiente ejemplo, la función v también va a depender del argumento de z, y esta dependencia determinará la variación del espectro local de $K - WKW$ de punto a punto sobre la frontera de G.

EJEMPLO 2) Sean $I = [1, 2]$ y G, $C(z)$, $H(z)$ igual que en el ejemplo anterior. Consideremos la función de dos variables reales

$$v(t, r) = \frac{1-r}{1+r}(t-1)^2 + \frac{2r}{1+r}(t-1) + 1, \quad t \in I, \quad 0 < r \leq 1$$

La función $v_r(t) = v(t, r)$ es una biyección de I para cada r fija. Supongamos que $r = r(z) = r(\arg\ z)$, con $z \in G$, es una función de clase C^1 y con valores en (0,1].

La función $V(z) = v(|z|, r(z))z/|z|$ es un difeomorfismo en G de clase C^1 tal que aplica cada segmento $\{ re^{i\theta} : \ a \leq r \leq b \}$ sobre el mismo.

Si $r(z) = r(\bar{z})$ entonces $C \circ V = V \circ C$, y por lo tanto,

$$\alpha = C \circ V \circ H \circ V^{-1}$$

es un difeomorfismo en G de clase C^1, que satiface la condición de Carleman, y con $\det J_\alpha > 0$. El teorema 5.2 y un cálculo muestran que

$$\text{sp } \pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W}) = \left\{ \ 0, \ \pm\frac{1 - 2r(\zeta_o)}{1 + 2r(\zeta_o)} \ \right\}, \quad \zeta_o \in \partial G.$$

Este ejemplo es un caso particular del ejemplo anterior cuando r es una función constante.

Dado cualquier intervalo cerrado contenido en [0,1), se puede elegir a r en forma adecuada tal que este intervalo viene a ser la parte positiva del espectro esencial de $K - WKW$. Para ser más explícitos, sea $[a, b]$ un intervalo cerrado contenido en [0,1) y

$$r(z) = d \ \text{sen}^2(n \ \arg\ z) \ + c,$$

donde $c = \frac{1}{2}\frac{1-b}{1+b}$, $d = \frac{1}{2}\frac{1-a}{1+a} - c$, n entero. El dominio de variación de r es el intervalo $[c, c+d] \subset (0, 1/2]$, luego, el dominio de variación de $\frac{1-2r}{1+2r}$ es el intervalo $[a, b]$.

En virtud del teorema 5.2, el operador $\lambda I - K + WKW$ es Fredholm si, y solo si, $\lambda \notin \{0\} \cup [-b, -a] \cup [a, b]$. Si $a = 0$, entonces sp $\pi_{\zeta_o}(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W}) = \{\ 0\ \}$ si, y solo si, arg $\zeta_o = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, k entero.

Consideremos el conjunto

$$SP_\alpha = \{(\zeta, t) :\ \zeta \in \overline{G},\ t \in \text{sp}\ \pi_\zeta(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})^2\ \}$$

cuando $r(z) = \frac{1}{3}\text{sen}^2(4\ \arg\ z) + \frac{1}{6}$. En este caso particular, la gráfica de SP_α pone de manifiesto el comportamiento del espectro local de $(K - WKW)^2$:

7 Algebra de símbolos de $\mathcal{R} = \mathcal{R}\ (K, W, C(M), \mathcal{C})$

El conjunto de puntos fijos de α se denotará por F_α. Para simplificar la descripción del álgebra de símbolos, vamos a suponer que

$$\overline{M - F_\alpha} = M.$$

Se define

$$\mathcal{M}_\alpha = \{(x, t)\ :\ x \in \partial G,\ t \in \text{sp}\ \pi_x(\hat{K} - \hat{W}\hat{K}\hat{W})^2\}.$$

Se denota por Ω el álgebra C* de todas las matrices $\sigma = (\sigma', \sigma'') \in C(\overline{G}, \mathbb{C}_2) \times C(\mathcal{M}_\alpha, \mathbb{C}_4)$, con las siguientes propiedades :

1) la matriz $\sigma'(\zeta)$ es diagonal si $\zeta \in F_\alpha$, y la matriz $\sigma''(x,0)$ es diagonal si $x \in F_\alpha \cap \partial G$.

2) la matriz $\sigma''(x,t)$ es diagonal por bloques 2×2 para todo $(x,t) \in \mathcal{M}_\alpha \bigcap \partial G \times \{0,1\}$.

3) para cada $\zeta = x \in \partial G$: $\quad \sigma'(\zeta) = \begin{pmatrix} \sigma''_{33}(x,0) & \sigma''_{34}(x,0) \\ \sigma''_{43}(x,0) & \sigma''_{44}(x,0) \end{pmatrix}.$

4) los valores $(\sigma'(\zeta), \sigma''(x,t))$ y $(\sigma'(\alpha(\zeta)), \sigma''(\alpha(x),t))$ están relacionados como sigue :

$$(\sigma'(\zeta), \sigma''(x,t)) = N\,(\sigma'(\alpha(\zeta)), \sigma''(\alpha(x),t))\,N$$

donde $N = N^* = N^{-1} = (N', N'')$,

$N'(\zeta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad$ y

$$N''(x,t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t} & 0 & i\sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-t} & 0 & -i\sqrt{t} \\ -i\sqrt{t} & 0 & -\sqrt{1-t} & 0 \\ 0 & i\sqrt{t} & 0 & \sqrt{1-t} \end{pmatrix}.$$

Normalizamos el álgebra Ω por

$$||\sigma|| = \max\{ \max_{\zeta\in\overline{G}} ||\sigma'(\zeta)||, \quad \max_{(x,t)\in\mathcal{M}_\alpha} ||\sigma''(x,t)|| \}$$

donde $||\sigma''(x,t)||^2 \quad [\ ||\sigma'(\zeta)||^2\ ]$ es el valor propio más grande de la matriz $\sigma''(x,t)\sigma''^*(x,t)\ \ [\ \sigma'(\zeta)\sigma'^*(\zeta)\ ]$.

Para la descripcción del álgebra $\mathcal{R} = \mathcal{R}(C(\overline{G}),\ K,\ W, \mathcal{C})$ utilizamos una variación de [12] ya que la proyección K es equivalente al operador cero en cada punto de G. Con el espectro local del operador $K - WKW$ se obtiene la descripción del álgebra de símbolos en el siguiente teorema.

Teorema 7.1 *El álgebra de símbolos* Sym $\mathcal{R} = \mathcal{R}/\mathcal{C}$ *del algebra* $\mathcal{R} = \mathcal{R}\ (K, W, C(\overline{G})I, \mathcal{C})$ *es isomorfa e isométrica a el álgebra* Ω. *Cuando ellas son identificadas, el homomofismo*

$$\text{sym}: \ \mathcal{R} \to \text{Sym}\ \mathcal{R}$$

está generado por la siguiente aplicación de los generadores del álgebra Ω:

$$\text{sym } a(\zeta)I = (\sigma'_a, \sigma''_a), \qquad \text{sym } K = (\sigma'_K, \sigma''_K), \qquad \text{sym } W = (\sigma'_W, \sigma''_W),$$

donde

$$\sigma'_a(\zeta) = \begin{pmatrix} a_+(\zeta) & a_-(\zeta) \\ a_-(\zeta) & a_+(\zeta) \end{pmatrix},$$

$$\sigma''_a(x,t) = \begin{pmatrix} a_+(\zeta) & a_-(\zeta) & 0 & 0 \\ a_-(\zeta) & a_+(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_+(\zeta) & a_-(\zeta) \\ 0 & 0 & a_-(\zeta) & a_+(\zeta) \end{pmatrix},$$

con $a_+(\zeta) = \frac{1}{2}[a(\zeta) + a(\alpha(\zeta))]$ *y* $a_-(\zeta) = \frac{1}{2}[a(\zeta) - a(\alpha(\zeta))]$,

$$\sigma'_W(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma''_W(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma'_K(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y$$

$$\sigma''_K(x,t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-t & t & i\sqrt{t(1-t)} & -i\sqrt{t(1-t)} \\ t & 2-t & -i\sqrt{t(1-t)} & i\sqrt{t(1-t)} \\ -i\sqrt{t(1-t)} & i\sqrt{t(1-t)} & t & -t \\ i\sqrt{t(1-t)} & -i\sqrt{t(1-t)} & -t & t \end{pmatrix}.$$

Observación 7.1 *Cuando el Jacobiano de α es menor que cero, $t \in \{0,1\}$, por lo tanto, todas las matrices en Ω son diagonales por bloques 2×2.*

Corolario 7.1 *Un operador A en el álgebra $\mathcal{R}$ es un operador de Fredholm si, y solo si, su símbolo es invertible, es decir,*

$$\det \text{ sym } A \neq 0$$

para todos los puntos de $\mathcal{M}_\alpha$.

Agradecimientos

Este trabajo es parte de la tesis doctoral del autor escrita bajo la dirección del Dr. Nikolai. L. Vasilekski. El autor desea expresar su agradecimiento al Dr. N. L. Vasilevski por su acertada dirección y sugerencias que permitieron la realización de este artículo.

Josué Ramírez Ortega
Departamento de Matemáticas,
CINVESTAV-IPN,
A.P. 14 – 740*,*
México D.F. 07000*,*
México.
josue@math.cinvestav.mx

Referencias

[1] Bergman S., *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Amer. Math. Soc., Providence, 1970.

[2] Calderon A. P., Zygmund A., *On the Existence of Certain Singular Integrals*, Acta Matematica **88** (1952), 85-139.

[3] Clancey K., Gohberg I., *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1981.

[4] Gohberg I. C., Kreĭn M. G., *Systems of Integral Equations on a Half Line with Kernel Depending on the Difference of Arguments*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **14** (1960), 217-286.

[5] Gohberg I., Krupnik N., *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, Vol. 1, Introduction*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992.

[6] Hörmander L., *Estimates for Traslation Invariant Operators in L^p Spaces*, Acta Math. **104** (1960), 93-140.

[7] Krupnik N. Y., *Banach Algebras with Symbol and Singular Integral Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, 1987.

[8] Mikhlin S. G., Prössdorf S., *Singular Integral Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986.

[9] Simonenko I. B., *A New General Method of Studying Operator Equations of the Type of Singular Integral Equations I (II)*, Izvestiya Akad. Nauk SSSR (ser. maten.), V. 29, 3 (4), 567-586 (757-782), 1965 (en ruso). Traducido en Soviet Math. Dokl. **5**, 1323-1326 (1486-1489), 1964.

[10] Spitkovski I. M., Vasilevski N. L., *On an Algebra Generated by Two Proyectors*, Dokl. Akad. Nauk USSR, Ser. A, No. 8 (1981), 10-13 (en ruso).

[11] Varela J., *Duality of C*-Algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. **148** (1974), 97-108.

[12] Vasilevski N. L., *On an Algebra Generated by Abstract Singular Operators and a Shift Operator*, Math. Nachr. **162** (1993) 89-108.