Grupos de Lie que no son Grupos de Matrices

Guillermo Moreno¹ Miguel Angel Torres²

Resumen

Se sabe que todo grupo de matrices es un grupo de Lie. El recíproco de esta afirmación no es cierto y el grupo de Heisenberg es un ejemplo de ello. La demostración de que el grupo de Heisenberg no es un grupo de matrices se apoya generalmente en series de Fourier y teoría de representaciones. En este artículo presentamos una prueba alterna de este hecho que utiliza exclusivamente herramientas de álgebra lineal.

1991 Mathematics Subject Classification: 22E20.

Keywords and phrases: Grupo de Lie, Grupo de Heisenberg.

1 Introducción

Al definir los grupos de Lie, los primeros ejemplos que aparecen ante nosotros son muy sencillos. Estos, y la mayoría de los grupos interesantes resultan ser grupos de matrices, ya sea por definición o porque pueden identificarse con conjuntos de matrices como ocurre con el grupo aditivo $\mathbb{R}$ que puede ser identificado con el grupo de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $x \in \mathbb{R}$.

¹Profesor Titular del Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN.

²Estudiante de Maestría en Matemáticas, CINVESTAV-IPN. Becario del CONACyT.

Existe una relación muy estrecha entre los grupos de Lie y los grupos de matrices. Resulta que todos los grupos de matrices son grupos de Lie. Sin embargo, no todos los grupos de Lie son grupos de matrices (también llamados grupos lineales) aún cuando sean cociente de grupos de matrices. Un ejemplo es el grupo de Heisenberg, importante en mecánica cuántica y teoría de operadores sobre espacios de Hilbert.

La prueba de que el grupo de Heisenberg no es un grupo de matrices se apoya generalmente en el uso de las series de Fourier (que implican integración) y teoría de representaciones. Una prueba de este tipo puede verse en [1]. En este artículo presentamos una demostración que utiliza exclusivamente herramientas de álgebra lineal.

Primero recordamos las definiciones de grupo de Lie y grupo de matrices para ubicarnos en nuestro problema, después definimos el grupo de Heisenberg $H(3)$ y finalmente procedemos a presentar la prueba mencionada.

2 Grupos de Lie

Empezaremos por presentar la definición de un grupo de Lie y dar algunos ejemplos.

Definición 1 *Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G de dimensión finita que es también un grupo topológico en el cual las operaciones de multiplicación e inversión*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G & \& \quad i : G \rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab & a &\mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

son suaves (i.e. infinitamente diferenciables).

Algunos ejemplos de grupos de Lie son los siguientes:

1. $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie, ya que es una variedad diferenciable de dimensión finita n , es un grupo topológico aditivo y las operaciones de adición y cambio de signo son suaves.
2. $GL_n(\mathbb{R})$, el grupo general lineal, es un grupo de Lie ya que es una variedad diferenciable de dimensión n^2 . También es un grupo topológico.
3. $O(n)$, el grupo ortogonal, es un subgrupo topológico de $GL_n(\mathbb{R})$, es también una variedad diferenciable de dimensión finita y por tanto es un grupo de Lie.

4. $SO(n)$ es un grupo de Lie.
5. En particular $GL_3(\mathbb{R})$, $O(3)$ y $SO(3)$ son grupos de Lie.

3 Grupos de matrices

En esta sección damos la definición de un grupo de matrices.

Definición 2 *Un grupo G es un grupo de matrices si es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Dado que $GL_n(\mathbb{R})$ puede ser considerado como un subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$, en la definición anterior se entiende que G es cerrado en $GL_n(\mathbb{R})$ con la topología relativa heredada de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Veamos algunos ejemplos de grupos de matrices.

1. $GL_n(\mathbb{R})$ es un grupo de matrices ya que es un grupo cerrado en sí mismo.
2. $O(3)$ es un subgrupo de $GL_3(\mathbb{R})$. Además es cerrado en $\mathbb{R}^9$ ya que $O(3) = \det^{-1}(\{-1, 1\})$, $\det : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\{-1, 1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.
3. $SO(3)$ es un grupo de matrices por las mismas razones por las cuales lo es $O(3)$.

Como vimos anteriormente, estos grupos de matrices son también grupos de Lie.

En general, si G es un grupo de matrices, entonces es un grupo de Lie ya que es un grupo topológico y una variedad diferenciable de dimensión finita (la dimensión de su espacio tangente T_G).

Surge la pregunta: ¿todo grupo de Lie es de matrices?

La respuesta es negativa y se da con el siguiente ejemplo.

4 El grupo de Heisenberg $H(3)$

Aunque es posible definir el grupo de Heisenberg $H(n+2)$ para n arbitrario (ver. [2]), aquí trabajaremos con $n = 1$, es decir con $H(3)$.

Consideremos los subconjuntos G_3 y N de $GL_3(\mathbb{R})$ definidos por

$$G_3 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Para simplificar la notación escribiremos los elementos de G_3 en la forma

$$A(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.1 G_3 es un subgrupo de $GL_3(\mathbb{R})$.

Demostración: Es claro que $I = A(0, 0, 0) \in G_3$.

Dados $A(x, y, z)$ y $A(u, v, w)$, tenemos que

$$\begin{aligned} A(x, y, z)A(u, v, w) &= \begin{pmatrix} 1 & u+x & w+vx+z \\ 0 & 1 & v+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A(u+x, v+y, w+vx+z) \in G_3. \end{aligned}$$

Además

$$A(x, y, z)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xy-z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(-x, -y, xy-z) \in G_3.$$

Por lo tanto $G_3 < GL_3(\mathbb{R})$. ■

Resulta evidente que G_3 es un subgrupo cerrado de $GL_3(\mathbb{R})$.

Proposición 4.2 N es un subgrupo normal de G_3 .

Demostración: N es subgrupo de G_3 ya que $A(0, 0, n)$ y $A(0, 0, m)$ en N implica que

$$A(0, 0, n)A(0, 0, m)^{-1} = A(0, 0, n)A(0, 0, -m) = A(0, 0, n-m) \in N.$$

Ahora sean $A(x, y, z) \in G_3$ y $A(0, 0, n) \in N$. Entonces

$$\begin{aligned} A(x, y, z)A(0, 0, n)A(x, y, z)^{-1} &= A(x, y, z)A(0, 0, n)A(-x, -y, xy - z) \\ &= A(0, 0, n) \in N. \end{aligned}$$

Por tanto $N \triangleleft G_3$. ■

De acuerdo con las proposiciones anteriores, se define el grupo de Heisenberg $H(3)$ como

$$H(3) = G_3/N$$

y denotaremos la clase lateral de $A(x, y, z)$ en G_3/N por

$$\overline{A(x, y, z)}.$$

$H(3)$ es un grupo topológico, y al ser G_3 y N variedades diferenciables, $H(3)$ también lo es. Dado que N es subgrupo normal cerrado de G_3 , se tiene que $H(3)$ es un grupo de Lie.

5 $H(3)$ no es grupo de matrices

Primero vamos a demostrar el siguiente lema técnico.

Lema 5.1 *Sea G un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$. Supongamos que existen elementos $A \neq I, B$ y C en G que satisfacen*

$$A = B^{-1}C^{-1}BC, \quad AB = BA,$$

y además $A^p = I$ para algún primo $p > 2$. Entonces $n \geq p$.

Demostración: Podemos considerar $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$.

Como $A^p = I$, se tiene que A satisface a $x^p - 1$. Y entonces el polinomio mínimo m_A de A divide a $x^p - 1 = (x - 1)(x^{p-1} + \dots + 1)$.

Pero $A \neq I$ implica que m_A es factor de $x^{p-1} + \dots + 1 = (x - \alpha)(x - \alpha^2) \dots (x - \alpha^{p-1})$ donde α es raíz primitiva p -ésima de 1. Sin pérdida de generalidad podemos afirmar que $x - \alpha | m_A$, con lo cual resulta que α es raíz de m_A y entonces existen α raíz p -ésima de 1 y $v_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tales que

$$Av_0 = \alpha v_0.$$

Sea $E_\alpha = \{v \in \mathbb{C}^n | Av = \alpha v\}$ el espacio propio correspondiente a α . Tomemos $v \in E_\alpha$. Entonces $A(Bv) = (AB)v = (BA)v = B(Av) = B(\alpha v) = \alpha Bv \Rightarrow Bv \in E_\alpha$. Y como $v \in E_\alpha$ es arbitrario, resulta que

$$B(E_\alpha) \subset E_\alpha.$$

Por otra parte, A restringido a E_α es igual a αI . De aquí que

$$A = B^{-1}C^{-1}BC = \alpha I \Rightarrow C^{-1}BC = \alpha B \text{ en } E_\alpha.$$

Vemos que B y αB son similares en E_α . De modo que B y αB restringidos a E_α tienen los mismos valores propios en E_α .

Si μ es un valor propio de B , entonces $\alpha\mu$ es un valor propio de αB . Luego $\alpha\mu$ es un valor propio de B . Por el mismo razonamiento $\alpha^2\mu$ es un valor propio de B , y así sucesivamente. Resulta que B tiene, en E_α , los valores propios

$$\mu, \alpha\mu, \alpha^2\mu, \dots, \alpha^{p-1}\mu$$

todos distintos, puesto que B es invertible.

Concluimos que

$$p \leq \dim(E_\alpha) \leq \dim(\mathbb{C}^n) = n \Rightarrow n \geq p. \blacksquare$$

Finalmente tenemos el siguiente

Corolario 5.2 $H(3)$ no es un grupo de matrices.

Demostración: Supongamos que $H(3)$ es un grupo de matrices, es decir, un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$ para algún n .

Sea p un primo arbitrario y definamos

$$B = \overline{A(1, 0, 0)}, C = \overline{A(0, 1/p, 0)} \text{ \& } A = B^{-1}C^{-1}BC = \overline{A(0, 0, 1/p)}.$$

Entonces $A^p = \overline{A(0, 0, 1)} = \overline{A(0, 0, 0)} = \bar{I}$ y también

$$AB = \overline{A(1, 0, 1/p)} = BA.$$

Luego, A, B y C satisfacen las hipótesis del lema y resulta que $n \geq p$, lo cual es una contradicción, pues n es fijo y p es un primo arbitrario. Por lo tanto, $H(3)$ no es un grupo de matrices. $\blacksquare$

Guillermo Moreno
Departamento de Matemáticas,
CINVESTAV-IPN,
A.P. 14 - 740,
México, D.F. 07000,
México.
gmoreno@math.cinvestav.mx

Miguel Angel Torres
Departamento de Matemáticas,
CINVESTAV-IPN,
A.P. 14 - 740,
México, D.F. 07000,
México.
mtorres@math.cinvestav.mx

Referencias

- [1] Segal, Graeme. *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge University Press. Cambridge, 1995.
- [2] Várilly, Joseph C. *Teoría de Grupos en Cuantización*. Publicaciones del Depto. de Matemáticas, CINVESTAV-IPN. México, 1992.
- [3] Curtis, Morton L. *Matrix Groups*. Springer Verlag. Berlin, 1984.
- [4] Fegan, Howard D. *Introduction to Compact Lie Groups*. World Scientific. Singapore, 1991.