Morfismos, Vol. 1, No. 1, 1997, pp. 1–12

Sobre las Gráficas Cúbicas de Orden 10 y sus Grupos de Automorfismos *

Víctor Neumann–Lara[1]

Resumen

En este artículo se demuestra que la gráfica de Petersen es la única gráfica cúbica (es decir, regular de grado 3) y orden 10 cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a S_5. En el proceso de la demostración se determinan las 19 gráficas conexas cúbicas de orden 10 y se obtienen algunas propiedades de sus grupos de automorfismos.

1991 Mathematics Subject Classification: 05C25, 05C675.
Keywords and phrases: *Gráfica de Petersen, Gráficas, Grupo de automorfismos.*

1 Introducción

Es bien sabido que la gráfica de Petersen (Fig. H_{19}) tiene al grupo simétrico S_5 como grupo de automorfismos ([2]: pp 76– 177, ejs. 14.11 y 14.23). Víctor González, [1] (Universidad Técnica F. Santamaría, Valparaíso, Chile) planteó la siguiente pregunta:

¿Es la gráfica de Petersen la única gráfica cúbica de orden 10 cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a S_5? Es sabido ([2], p. 71) que existe una infinidad de gráficas conexas cúbicas cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a S_5. En este trabajo resolvemos el problema de V. González afirmativamente. En el proceso de demostración determinamos las 19 gráficas conexas cúbicas de orden 10 (una gráfica es cúbica

---

* **Artículo por invitación.**

[1] Investigador Titular, Instituto de Matemáticas, UNAM.

si todos sus vértices tienen valencia 3). Las definiciones básicas pueden verse en [2]. Si G es una gráfica, $q(G)$ denota el número de aristas de G y $\mathrm{Aut}(G)$ es el grupo de automorfismos de G. Si $\Gamma = \mathrm{Aut}(G)$ y $v_1, v_2 \cdots, v_k$ son vértices de G, entonces $\Gamma(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ designará al subgrupo de Γ que fija a cada uno de los vértices $v_1, v_2, \cdots, v_k$; de igual manera, si S es un conjunto de vértices, $\Gamma(S)$ designará al subgrupo de Γ que deja invariante a S. Como es usual, S_n y D_n denotan a los grupos simétrico y diédrico respectivamente.

En lo que sigue $g(G)$ denotará el cuello (girth) de G, es decir, la longitud mínima de un ciclo en G.

Las gráficas H_j así como las auxiliares W_r y W_{rs} a las que hace referencia el texto, aparecen en dos catálogos al final del mismo.

2 Las 19 gráficas conexas cúbicas de orden 10

A partir de este momento, G_n denotará una gráfica de orden n, es decir, una gráfica con n vértices.

Lema 2.1 *Si G_{10} es una gráfica cúbica y G_6 es una subgráfica inducida de G_{10} entonces $G_4 = G_{10} - G_6$ satisface la igualdad $q(G_4) = q(G_6) - 3$.*

Demostración: Si se suman las valencias (en G_{10}) de los vértices de G_6, cada arista de G_6 queda contada dos veces mientras que cada arista que une G_6 con G_4 queda contada una sola vez. Se sigue que el número de aristas que unen G_4 y G_6 es 18–2 $q(G_6)$. Análogamente, 2 $q(G_4) = 12 - (18 - 2q(G_6))$ y de allí $q(G_4) = q(G_6) - 3$. ■

En lo que sigue, G denotará siempre una gráfica conexa cúbica de orden 10.

Lema 2.2 *Si G contiene a $W_0 = K_2 + \bar{K}_2$ como subgráfica entonces G es isomorfa a una de las gráficas H_j para $j = 1, 2, 3, 4, 5$.*

Demostración: Ya que G es conexa, W_0 es una subgráfica inducida de G. W_0 se extiende a una subgráfica inducida G_6 de G que es isomorfa a W_{01}, W_{02} o W_{03}. Aplicando el lema 2.1, el resultado se sigue fácilmente. ■

Lema 2.3 *Si G no contiene a W_0 como subgráfica pero contiene a W_1 entonces G es isomorfa a una de las gráficas H_j para $j = 6, 7, 8$.*

Demostración: W_1 es subgráfica inducida de G pues de otro modo $G - W_1$ contendría a W_0 como subgráfica por el lema 2.1. Además $q(G - W_1) = 4$ y el resultado se sigue fácilmente. ■

Lema 2.4 *Si G contiene algún triángulo pero no contiene ni a W_0 ni a W_1 como subgráficas, entonces G es isomorfa a alguna H_j para $j = 9, 10, 11, 12, 13$.*

Demostración: Cualquier triángulo de G puede extenderse a una subgráfica G_6 inducida de G isomorfa a alguna de las gráficas W_{20}, W_{21}, W_{22}, W_{23}. Como G es conexa, el caso $G_6 \cong W_{23}$ es imposible. Así mismo $G_6 \cong W_{22}$ pues de otro modo $G - G_6 \cong W_0$ por el lema 2.1. Si $G_6 \cong W_{20}$, es fácil ver que G es isomorfa a una de las gráficas H_j para $j = 9, 10, 11$. Si $G_6 \cong W_{21}$ entonces G es isomorfa a una de las gráficas H_j para $j = 12, 13$. ■

Lema 2.5 *Si el cuello de G es 4, entonces G es isomorfa a alguna de las gráficas H_j para $j \in [14, 18]$.*

Demostración: Caso 1. G contiene a W_3 como subgráfica.

Notemos en primer lugar que $q(G - W_3) \leq 4$. Aplicando el lema 2.1 se sigue que la subgráfica de G inducida por W_3 tiene a lo más 7 aristas. Por lo tanto, W_3 es subgráfica inducida de G y $G - W_3$ es un cuadrado. Se sigue que G es isomorfa a alguna H_j para $j = 14, 15, 16$.

Caso 2. G no contiene a W_3 como subgráfica.

G contiene como subgráfica a W_{40} o a W_5. Si G contiene a W_5 entonces por el lema 2.1, W_5 es subgráfica inducida de G y $G - W_5$ es un cuadrado. Se sigue sin más que $G \cong H_{17}$. Supongamos ahora que G contiene una subgráfica G_8 isomorfa a W_{40}. Sea G_8' la subgráfica de G inducida por G_8. Ya que el número de aristas entre G_8' y $G - G_8'$ es $24 - 2q(G_8') = 6 - 2q(G - G_8')$, se tiene $q(G_8') = 9 + q(G - G_8')$ y entonces $q(G_8') = 9, 10$. En el primer caso, $G_8' \cong W_{41}$ y G es isomorfa a H_{18}. El segundo caso no puede presentarse ya que G_8' sería isomorfo a W_{42} y G contendría a W_3. ■

Lema 2.6 *Si $g(G) \geq 5$, entonces G es la gráfica de Petersen.*

Demostración: Sea C un ciclo de longitud $g(G)$. Supongamos que $6 \leq g(G)$ y sea R_C un conjunto de vértices de C con diámetro 3 en la distancia correspondiente a C y máximo número posible de elementos. Los vértices vecinos de R_C en $G-C$ son todos diferentes y como $|R_C| \geq 4$ se sigue que $g(G) = 6$. Pero en este caso $|R_C| = 6$ lo que implica que hay por lo menos 6 vértices en $G-C$, lo que es imposible. Asi $g(G) = 5$. Podemos asumir que $C = C_5$. Denotemos por j' al vecino de j en $G-C_5$. Claramente los vecinos de j' en $G - C_5$ son $(j+2)'$ y $(j-2)'$ con $j+2$ y $j-2$ tomados mod. 5 y G es la gráfica de Petersen H_{19}. ∎

Lema 2.7 *Si G es una gráfica conexa cúbica de orden 10, entonces G es isomorfa a alguna H_j.*

Demostración: Ya que G obviamente contiene ciclos, el lema es consecuencia directa de los lemas 2.2–2.6. ∎

Teorema 2.1 *Hay exactamente 19 gráficas conexas cúbicas de orden 10, salvo isomorfismo: Las gráficas $H_j, j \in [1, 19]$ del catálogo.*

Demostración: Sean

$$\begin{array}{ll} F = \{H_j : j \in [1,19]\}, & F_1 = \{H_j : j \in [1,5]\}, \\ F_2 = \{H_j : j \in [6,8]\}, & F_3 = \{H_j : j \in [9,13]\}, \\ F_4 = \{H_j : j \in [14,18]\}, & F_5 = \{H_{19}\}. \end{array}$$

Solo necesitamos demostrar que las H_j son no isomorfas por pares. Si dos de ellas pertenecen a dos clases distintas, entonces son claramente no isomorfas: Las de la clase F_1 contienen a W_0 como subgráfica, las demás no; las incluídas en F_2 contienen a W_2 como subgráfica, las de las clases posteriores no; las de F_3 tienen triángulos, las de $F_4 \cup F_5$ no; las de F_4 contienen cuadrados, H_{19} es libre de cuadrados. En F_1 no hay repeticiones: H_1 es el único miembro que no es 2–conexo, de las restantes gráficas, H_5 es la única que contiene dos copias de W_0, finalmente $H_2 - W_0, H_3 - W_0$ y $H_4 - W_0$ son mutuamente no isomorfas. En F_2, H_6 contiene 3 triángulos mutuamente ajenos, H_7 y H_8 sólo 2, H_7 contiene 2 cuadrados ajenos, H_8 no. En F_3, H_9, H_{10} y H_{11} contienen a W_{20} como subgráfica inducida, H_{12} y H_{13} no; además $H_9 - W_{20}, H_{10} - W_{20}$ y $H_{11} - W_{20}$ son mutuamente no isomorfas; H_{12} contiene 2 triángulos ajenos, H_{13} contiene solamente un triángulo. En F_4, H_{15} y H_{17} son bipartitas, H_{14}, H_{16} y H_{18} no; además H_{14}, H_{15} y H_{16} contienen una copia de W_3, en cambio H_{17} y H_{18} no contienen ninguna. Finalmente, H_{14} contiene 5 copias distintas de W_3 mientras que H_{16} solo contiene una. Con esto termina la prueba. ■

3 Grupos de automorfismos

Teorema 3.1 *La gráfica de Petersen (H_{19}) es la única gráfica cúbica de orden 10 cuyo grupo de automorfismos es el grupo simétrico S_5.*

Demostración:

1. Sea G una gráfica cúbica de orden 10 cuyo grupo de automorfismos es S_5. Demostraremos primero que G es conexa. Si G fuera inconexa, sería unión disjunta de K_4 y una gráfica conexa cúbica G_6 que es el prisma triangular o $K_{3,3}$. Se sigue ([2], Teor. 14.6) que $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(K_4)+$ $\mathrm{Aut}(G_6)$. Ahora bien el grupo de automorfismos del prisma triangular (W_{23}) es $S_3 + S_2$ y el de $K_{3,3}$ es de orden $2.3!^2$=72. Luego $\mathrm{Aut}(G) \neq S_5$. Otra manera de probarlo consiste en recordar que el grupo alternante A_5 es el único subgrupo normal de S_5 no trivial distinto de S_5 ([3], p. 150).

   Por el teorema 2.1, G es isomorfa a alguna H_j. Analicemos ahora los grupos de automorfismos de las H_j. Sea Γ_j =$\mathrm{Aut}(H_j)$.

2. Γ_1 fija a la arista [5,6] ya que es la única arista de corte de H_1. Como hay un automorfismo de H_1 que invierte los vértices 5 y 6, entonces $\Gamma_1(5,6)$ tiene índice 2 en Γ_1 y ya que claramente $\Gamma_1(5,6) \cong S_2 + S_2 + S_2 + S_2$, el orden de Γ_1 es 32.

3. Γ_2, Γ_3 y Γ_4 dejan invariante a W_0 y por lo tanto dejan invariante al par $\{5,6\}$ y como en todos ellos hay automorfismos que invierten a 5 y 6, el índice de $\Gamma_j(5,6)$ en Γ_j es 2 para $j = 2,3,4$. Ahora bien, claramente $\Gamma_2(5,6) \cong S_2 + S_2$, $\Gamma_3(5,6) \cong S_2 + S_2 + S_2$, $\Gamma_4(5,6) \cong$ S_2. Así los órdenes de Γ_2, Γ_3 y Γ_4 son 8, 16 y 4 respectivamente.

4. Γ_5 deja invariante al par $\{5,6\}$ y como en los casos anteriores, $\Gamma_5(5,6)$ tiene índice 2 en Γ_5. A su vez, $\Gamma_5(5,6,1,9)$ tiene índice 2 en $\Gamma_5(5,6)$ y fija también a 3 y 7.

   Como $\Gamma_5(5,6,1,9) \cong S_2 + S_2$ y tiene índice 4 en Γ_5, se sigue que el orden de Γ_5 es 16.

5. Demostraremos que $\Gamma_6 \cong S_3$. En primer lugar, Γ_6 fija a 10 que es el único vértice de H_6 que no está en ningún triángulo. Así Γ_6 deja invariante a la terna $\{1, 4, 9\}$. Es fácil ver que cada permutación de $\{1, 4, 9\}$ determina un único automorfismo de H_6.

6. Claramente Γ_7 y Γ_8 dejan invariante a la arista [2,3] en H_7 y H_8 respectivamente y como en casos anteriores $\Gamma_7(2, 3)$ y $\Gamma_8(2, 3)$ tienen índice 2 en Γ_7 y Γ_8 respectivamente. Como además $\Gamma_7(2, 3) \cong S_2$ y $\Gamma_8(2, 3) \cong S_2 + S_2$, se sigue que los órdenes de Γ_7 y Γ_8 son 4 y 8 respectivamente.

7. H_9 y H_{11} sólo contienen un triángulo: el inducido por $\{1, 2, 3\}$. Luego Γ_9 y Γ_{11} dejan invariante a W_{20}. Como $H_{11} - W_{20} \cong K_{1,3}$, se sigue que Γ_{11} fija al vértice 10 y puede verse fácilmente que $\Gamma_{11} \cong S_3$. Por otra parte, Γ_9 deja invariante a $H_9 - W_{20} \cong P_4$ y como el vértice 6 completa un pentágono con tal trayectoria, lo que no ocurre con los vértices 4 y 5, Γ_9 fija a 6 y, por lo tanto, también a 3 y a la arista $[1, 2]$. Como existe un automorfismo de H_9 de orden 2 que invierte los vértices 1 y 2 y además $\Gamma_9(1, 2)$ es claramente trivial, se sigue que $\Gamma_9 \cong S_2$.

8. H_{10} contiene exactamente 2 copias de W_{20}. Ya que $\{4, 5, 6\}$ es el conjunto de vértices de valencia 1 para ambas copias, se sigue que $\{4, 5, 6\}$ es invariante bajo Γ_{10} y, por lo tanto, el vértice 7 queda fijo. De esta observación se desprende inmediatamente que Γ_{10} es isomorfo al grupo de automorfismos del prisma triangular que es $S_3 + S_2$.

9. Como H_{12} contiene exactamente 2 triángulos, el conjunto $\{4, 6\}$ de vecinos comunes a ambos es invariante bajo Γ_{12}. Ya que $(4, 6)$ $(5, 10)$ $(2, 9)$ $(1, 7)$ $(3, 8)$ es un automorfismo de orden 2 que invierte a 4 y 6, $\Gamma_{12}(4, 6)$ tiene índice 2 en Γ_{12}. Además, $\Gamma_{12}(4, 6)$ fija a 5 y 10 ya que cada uno de ellos es vecino de 4 y 6 respectivamente y no está contenido en un triángulo. Así $\Gamma_{12}(4, 6) = \Gamma_{12}(4, 5, 6, 10)$. Es fácil ver que $\Gamma_{12}(4, 5, 6, 10)$ es trivial y así Γ_{12} tiene orden 2.

10. Como H_{13} sólo contiene un triángulo (el inducido por $\{1, 2, 3\}, \Gamma_{13}$ deja invariante a W_{21} y, por lo tanto, fija a los vértices 3 y 6. Ya que existe un automorfismo que invierte los vértices 1 y 2, $\Gamma_{13}(1, 2)$

tiene índice 2 en Γ_{13} y como $\Gamma_{13}(1,2) \cong S_2$ (consta de la identidad y la transposición (7,10)), el orden de Γ_{13} es 4.

11. H_{14} es un prisma pentagonal, así Γ_{14} es isomorfo a $D_5 + S_2$.

12. En H_{15}, las aristas que están incluídas en un solo cuadrado (vg. [1,2], [9,10], etc.) forman un ciclo C_{10} de longitud 10 que naturalmente es invariante bajo Γ_{15}. Como las restantes aristas unen pares de vértices diametralmente opuestos en C_{10}, se sigue inmediatamente que $\Gamma_{15} \cong D_{10}$.

13. Como H_{16} sólo contiene una copia de W_3 como subgráfica (precisamente W_3), W_3 es invariante bajo Γ_{16} y, por lo tanto la arista [2,5] es también invariante. Como hay un automorfismo de H_{16} que permuta los vértices 2 y 5, $\Gamma_{16}(2,5)$ tiene índice 2 en Γ_{16}. Ahora bien, el par $\{1,3\}$ es invariante bajo $\Gamma_{16}(2,5)$ y como hay un miembro de este último grupo que invierte a 1 y 3, se sigue que $\Gamma_{16}(2,5,1,3)$ tiene índice 4 en Γ_{16}. Como es claro que $\Gamma_{16}(2,51,3)$ es trivial, Γ_{16} tiene orden 4.

14. Como el conjunto de aristas $\{11', 22', 33'\}$ es la única terna de aristas independientes cuya remoción desconecta a H_{17}, es fácil ver que cada automorfismo de H_{17} deja invariante a $\{1,2,3\}$ o lo manda a $\{1',2',3')$. Como el automorfismo

$$(1,1')(2,2')(3,3')(a,a')(b,b')$$

envía $\{1,2,3\}$ a $\{1',2',3'\}$, se sigue que $\Gamma_{17}(\{1,2,3\})$ tiene índice 2 en Γ_{17}. A su vez $\Gamma_{17}(a) = \Gamma_{17}(a,b)$ tiene índice 2 en $\Gamma_{17}(\{1,2,3\})$ y es además isomorfo a $\mathrm{Aut}(K_{2,3}) \cong S_2 \times S_3$. Se sigue que Γ_{17} tiene orden 48.

15. Como H_{18} se obtiene del cubo W_6 por subdivisión de las aristas 49 y 2(10) e inserción de la arista 56, es fácil constatar que Γ_{18} es un subgrupo del grupo del cubo y así su orden es un divisor de 48 lo que implica que no es S_5. De modo más preciso, como los únicos vértices de H_{18} que no están en un cuadrado son 5 y 6, la arista 56 es invariante bajo bajo Γ_{18}. Como hay un automorfismo de H_{18} de orden 2 que invierte a 56, se sigue que $\Gamma_{18}(5,6)$ tiene índice 2 en Γ_{18}. Análogamente $\Gamma_{18}(5,6,4,9)$ tiene índice 2 en $\Gamma_{18}(5,6)$ y, de igual modo, $\Gamma_{18}(5,6,4,9,1,3)$ tiene índice 2 en $\Gamma_{18}(5,6,4,9)$.

Ya que $\Gamma_{18}(5,6,4,9,1,3)$ es trivial, se sigue que Γ_{18} tiene orden 8.

De los incisos 1–15 se desprende que sólo la gráfica de Petersen (H_{19}) tiene a S_5 como grupo de automorfismos. ■

Se sugiere al lector calcular los grupos de automorfismos de las 19 gráficas cúbicas conexas de orden 10.

Problema: Sea $P^{(0)}$ la gráfica de Petersen. Definimos $P^{(k)}$ inductivamente tomando $P^{(k+1)} = L(P^{(k)})$ donde $L(G)$ es la gráfica de líneas de G. Sabemos que $\mathrm{Aut}(P^{(k)}) \cong S_5$ para toda k, ya que $\mathrm{Aut}(L(G_n)) \cong \mathrm{Aut}(G_n)$ para toda gráfica conexa de orden $n \geq 5$ ([2], p.177, Ex.14.23). Sean p_k y q_k el orden y el número de aristas de $P^{(k)}$ respectivamente. Es fácil ver que todos los vértices de $P^{(k)}$ tienen valencia $r_k = 2^k + 2$; además $p_{k+1} = q_k$ y $q_{k+1} = p_{k+1}.(2^k+1) = q_k.(2^k+1)$. Determinar el conjunto U de valores de k tal que $P^{(k)}$ es la única gráfica de orden p_k, regular de grado $r_k = 2^k + 2$ cuyo grupo de automorfismos es S_5. Obsérvese que si $m' \leq m \in U$, entonces $m' \in U$.

Víctor Neumann–Lara
Instituto de Matemáticas, UNAM,
Circuito Exterior, C. U.,
México D.F. 04510, *México.*
neumann@gauss.matem.unam.mx

Referencias

[1] González V. *Comunicación personal en el Congreso de Algebra y Geom. Alg.,* CIMAT, Gto. agosto 1992.

[2] Harary F. *Graph Theory.* Addison Wesley Publishing Company, Reading Mass., 1969.

[3] Van der Waerden B.L.. *Modern Algebra. Vol. 1.* Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1949.